



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή 4 Οκτωβρίου 2015

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A2. i. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

ii. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A3.

i. Σωστό

ii. Σωστό

iii. Λάθος

iv. Λάθος

v. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

i. $A = (0, +\infty)$

ii. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και $\ln x_1 < \ln x_2$ οπότε $\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2$ αριθμητικά $f(x_1) < f(x_2)$. Οπότε f απόλυτη μεγαλύτερη στο διάστημα $(0, +\infty)$.

iii. Η f είναι απόλυτη μεγαλύτερη στο διάστημα $(0, +\infty)$ αριθμητικά $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \ln x + x = x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$

iv. $f(x^2 + x + 1) = f(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1$.

v. $f(f^{-1}(1+e)) = f(e) \Leftrightarrow 1+e = e$ ισχύει.

vi. Έστω $\alpha, \beta \in f(A)$ με $\alpha < \beta$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$.

Έστω $f^{-1}(\alpha) \geq f^{-1}(\beta) \Leftrightarrow f(f^{-1}(\alpha)) \geq f(f^{-1}(\beta)) \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$ ΑΤΟΠΟ.

$$\text{vii. } f(f^{-1}(f(x^2 + x + e) - e)) > f(1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 + x + e) - e > 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 + x + e) > 1 + e \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 + x + e) > f(e) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 + x + e > e$$

$$x(x+1) > 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty]$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{i. } \Theta \epsilon \tau o v \mu \epsilon \frac{f(x) - 2 - \eta \mu x}{x^2 - x} = g(x) \quad \mu \epsilon \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

$$\text{Οπότε } f(x) = (x^2 - x)g(x) + 2 + \eta \mu x$$

$$\text{Αρχικά } \lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 - x)g(x) + 2 + \eta \mu x] = 0 + 2 + 0 = 2$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)g(x) + 2 + \eta \mu x - 2}{x} = -3 + 1 = -2$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} \cdot \frac{f(x) + 2}{x - 1} = -2(-4) = 8$$

Γ2.

$$\text{i. } 2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x + 2 \quad x \geq 0$$

$$\text{Αρχικά } \alpha \pi \text{ K.P. } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$\text{ii. } 2\sqrt{2x} - 4 \leq f(x) - 4 \leq x + 2 - 2$$

$$\Gamma \text{ i.e. } x > 2: \frac{2\sqrt{2x} - 4}{x - 2} \leq \frac{f(x) - 4}{x - 2} \leq 1$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2\sqrt{2x} - 4}{x - 2} = 1 \text{ και από Κ.Π.: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$$

$$\text{Για } x < 2: \frac{2\sqrt{2x} - 4}{x - 2} \geq \frac{f(x) - 4}{x - 2} \geq 1$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2\sqrt{2x} - 4}{x - 2} = 1 \text{ και από Κ.Π.: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = 1$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - 4}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} - 2} \right) = 1 \cdot 4 = 4$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Για } x < 0 \quad f'(x) = \sigma v v x + 2$$

$$x > 0 \quad f'(x) = 2x + 3$$

$$\Sigma \tau o \quad x=0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu x + 2x + 1 - 1}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x + 1 - 1}{x} = 0 + 3 = 3$$

$$\text{Οπότε } f'(0) = 3$$

Δ2.

$$\text{i. } \phi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\text{ii. } \phi'(q) = \frac{f'(q)g(q) - f(q)g'(q)}{(g(q))^2} = 0$$

$$f'(q)g(q) - f(q)g'(q) = 0 \Leftrightarrow f'(q)g(q) = f(q)g'(q) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(q)}{g'(q)} = \frac{f(q)}{g(q)} = \phi(q)$$

Δ3.

$$\text{i. } \exists \chi \forall \mu \varepsilon \quad -x^2 \leq f(x) - g(x) \leq x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=0: \quad 0 \leq f(0) - g(0) \leq 0$$

$$f(0) - g(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(0) = g(0)$$

ii. $-x^2 + g(x) \leq f(x) \leq x^2 + g(x)$

$$-x^2 + g(x) - f(0) \leq f(x) - f(0) \leq x^2 + g(x) - f(0)$$

$$\Gamma \text{ i.e. } x > 0: -x + \frac{g(x) - g(0)}{0} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq x + \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x + \frac{g(x) - g(0)}{x} \right) = 0 + g'(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{g(x) - g(0)}{x} \right) = 0 + g'(0) = 2 \end{array} \right\} \text{ According to K.P.} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$$

$$\text{Otherwise if } x < 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$$

$$\text{Therefore } f'(0) = 2$$