ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μ. ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 28-29
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδες 86-87
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16
Α4. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού το εύρος R=20 min και το πλήθος των κλάσεων είναι κ=5, τότε $c=\frac{R}{\kappa}=\frac{20}{5}=4$. Αν οι κλάσεις είναι [α, α+4), [α+4, α+8), [α+8, α+12), από την κεντρική τιμή της $3^{ης}$ κλάσης

$x_3=\frac{(\alpha+8)+(\alpha+12)}{2}\Leftrightarrow\frac{2\alpha+20}{2}\Leftrightarrow 20=2\alpha+20\Leftrightarrow\alpha=0$, άρα οι κλάσεις είναι [0, 4), {4, 8), {8, 12), [12, 16), [16, 20).

Έχουμε επίσης ότι $N_5=50$, αφού $N_5=\nu$, άρα ν=50.

Επίσης, δίνεται ότι 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 4 min άρα $\nu_1=3$, έτσι:

$f_1=\frac{v_1}{v}=\frac{3}{50}=\frac{6}{100}=0{,}06$ και $F_2=0{,}2$, άρα

$f_1+f_2=0{,}2\Leftrightarrow f_2=0{,}2-0{,}06\Leftrightarrow f(2)=0{,}14$

$\frac{v_2}{v}=0{,}14\Leftrightarrow\frac{v_2}{50}=0{,}14\Leftrightarrow v_2=7$

Δίνεται επίσης ότι 20 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 12 mm, άρα

$N_3=20\Leftrightarrow \nu_1+\nu_2+\nu_3=20\Leftrightarrow 10+\nu_3=20\Leftrightarrow \nu_3=10$, άρα

$f_3=\frac{v_3}{v}=\frac{10}{50}=0{,}2$ και $F_3=f_1+f_2+f_3=0{,}4$, δίνεται επίσης ότι το 84% των μαθητών περιμένουν χρόνο λιγότερο από 16 min, άρα

$F_4\%=84\Leftrightarrow F_4=0{,}84\Leftrightarrow f_1+f_2+f_3=0{,}84$, οπότε

$f_4=0{,}84-0{,}4=0{,}44$ και $\frac{v_4}{v}=0{,}44\Leftrightarrow\frac{v_4}{50}=0{,}44\Leftrightarrow v_4=22$.

Οπότε $N_4=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=3+7+10+22=42$, άρα $\nu_5=50-42=8$.
Άρα ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις: χρόνος σε min	**Κέντρο κλάσης xi**	**Συχνότητα νi**	**Ni**	**fi**	**Fi**	**Fi%**
[0,4)	2	3	3	0,06	0,06	6
[4,8)	6	7	10	0,14	0,2	20
[8,12)	10	10	20	0,2	0,4	40
[12,16)	14	22	42	0,44	0,84	84
[16,20)	18	8	50	0,16	**1**	100
Σύνολο		**50**		**1**		

Β2. Για το μέσο χρόνο αναμονής και τη διασπορά:

Κλάσεις: χρόνος σε min	xi	νi	$x_i \cdot \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i$
[0,4)	2	3	6	-10	0,06	300
[4,8)	6	7	42	-6	0,2	252
[8,12)	10	10	100	-2	0,4	40
[12,16)	14	22	308	2	0,84	88
[16,20)	18	8	144	6	**1**	288
Σύνολο		**50**	**600**			**968**

Άρα $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i = \frac{1}{50} \cdot 600 = 12$ min και η διασπορά ή διακύναμση

$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i$ δηλαδή $s^2 = \frac{1}{50}986 = \frac{1936}{100} = 19,36\ \text{min}^2$, οπότε

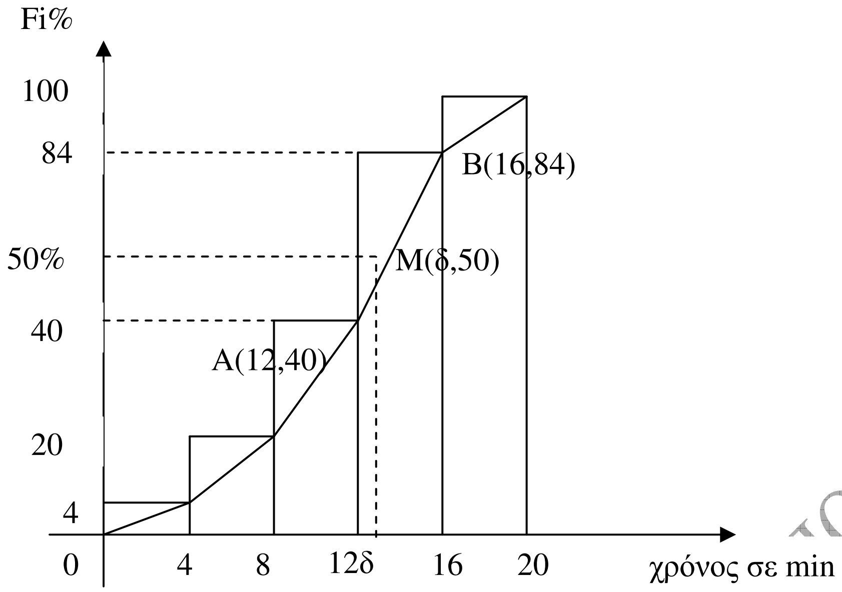
$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{19,36} = 4,4$ min.

Η διάμεσος δ σε ομαδοποιημένη κατανομή αντιστοιχεί στην τιμή x=δ της μεταβλητής x (στον οριζόντιο άξονα) έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του δ. Δηλαδή η διάμεσος έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i=50\%$ έτσι στο σχήμα από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό τα σημεία Α, Μ, Β είναι συνευθειακά έτσι:

$\lambda_{AB} = \lambda_{AM} \Leftrightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ ή

$\frac{84-40}{16-12} = \frac{50-40}{\delta-12} \Leftrightarrow \frac{44}{4} = \frac{10}{\delta-12} \Leftrightarrow 11(\delta-12) = 10$ ή

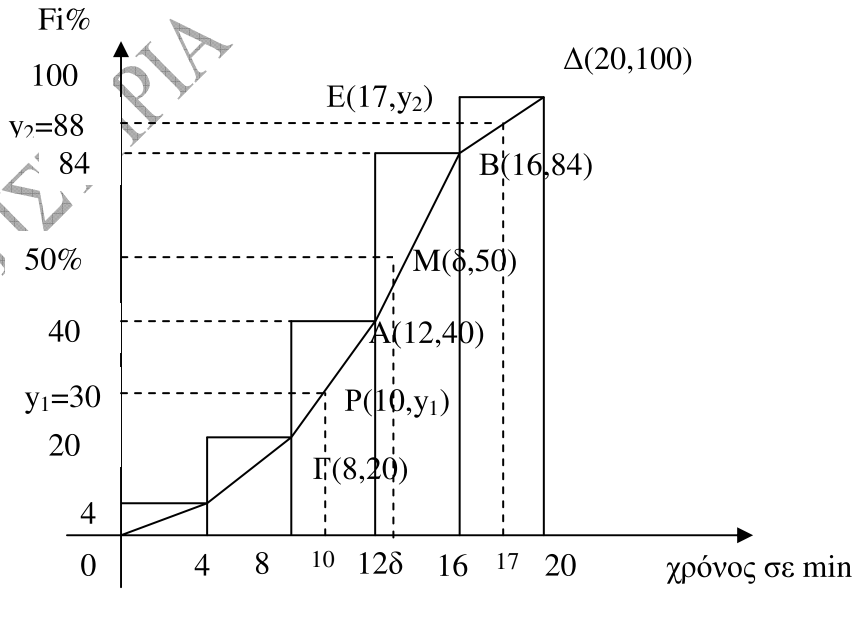
$11\delta - 132 = 10 \Leftrightarrow 11\delta = 142 \Leftrightarrow \delta = \frac{142}{11} = 12,9$ min περίπου



Β3. α) Από το σχήμα έχουμε Γ(8, 20), Ρ(10, y_1), Α(12, 40)

$\lambda_{\Gamma A} = \lambda_{\Gamma P} \Leftrightarrow \dfrac{y_A - y_\Gamma}{x_A - x_\Gamma} = \dfrac{y_P - y_\Gamma}{x_P - x_\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{40-20}{12-8} = \dfrac{y_1 - 20}{10-8}$, άρα

$\dfrac{20}{4} = \dfrac{y_1 - 20}{2} \Leftrightarrow 5 = \dfrac{y_1 - 20}{2} \Leftrightarrow y_1 - 20 = 10 \Leftrightarrow y_1 = 30$ άρα το 30% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 10 min (οπότε το 70% κάνει χρόνο από 10 min και πάνω) άρα για το ενδεχόμενο Α={ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος από 10 min}, έχουμε $P(A) = P(t < 10 \text{ min}) = \dfrac{30}{100} = 0,3$.



$$\lambda_{B\Delta}=\lambda_{BE}\Leftrightarrow\frac{y_\Delta-y_B}{x_\Delta-x_B}=\frac{y_E-y_B}{x_E-x_B}\Leftrightarrow\frac{100-84}{20-16}=\frac{y_2-84}{17-16}$$, άρα

$$\frac{16}{4}=\frac{y_2-84}{1}\Leftrightarrow 4=y_2-84\Leftrightarrow y_2=88$$

Άρα το 88% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 17 min, από αυτούς το 20% έχει χρόνο αναμονής κάτω από 8 min, άρα χρόνο αναμονής τουλάχιστον 8 min και λιγότερο από 17 min έχει το 88-20=68% του συνόλου των μαθητών. Έτσι για την πιθανότητα του ενδεχομένου Β={ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον 8 min και λιγότερος από 17 min}, έχουμε

$$P(B)=P(8\le t<17\ \text{min})=\frac{68}{100}=0,68.$$

β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A\cap B$={ο χρόνος αναμονής του μαθητή 8 min ≤t≤10 min}, τότε το 30% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 10 min, από αυτούς το 20% έχει χρόνο αναμονής κάτω από 8 min, οπότε το 30-20=10% έχει χρόνο αναμονής 8min≤t≤10 min,

άρα $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,3+0,68-0,1=0,88$, ενώ

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,3-0,1=0,2$,

έτσι $P((A\cup B)-A)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0,68-0,1=0,58$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αρχικά για το όριο $\delta=13\cdot\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5x-5}{2\sqrt{x+3}-4}\right)$

Πρέπει $x+3\ge0$ και $2\sqrt{x+3}-4\ne0$ οπότε $x\ge-3$ και $\sqrt{x+3}\ne2$, άρα $x\ge-3$ και $x+3\ne4$, έτσι έχουμε $x\ge-3$ και $x\ne1$, άρα η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο $A=[-3,1)\cup(1,+\infty)$ άρα για τη συνάρτηση έχουμε:

$$f(x)=\frac{5(x-1)}{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\frac{5(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2(x+3)-2\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$ ή

$$f(x)=\frac{5(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2\right)}=\frac{5(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2(x+3-4)}=\frac{5\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2}$$ άρα

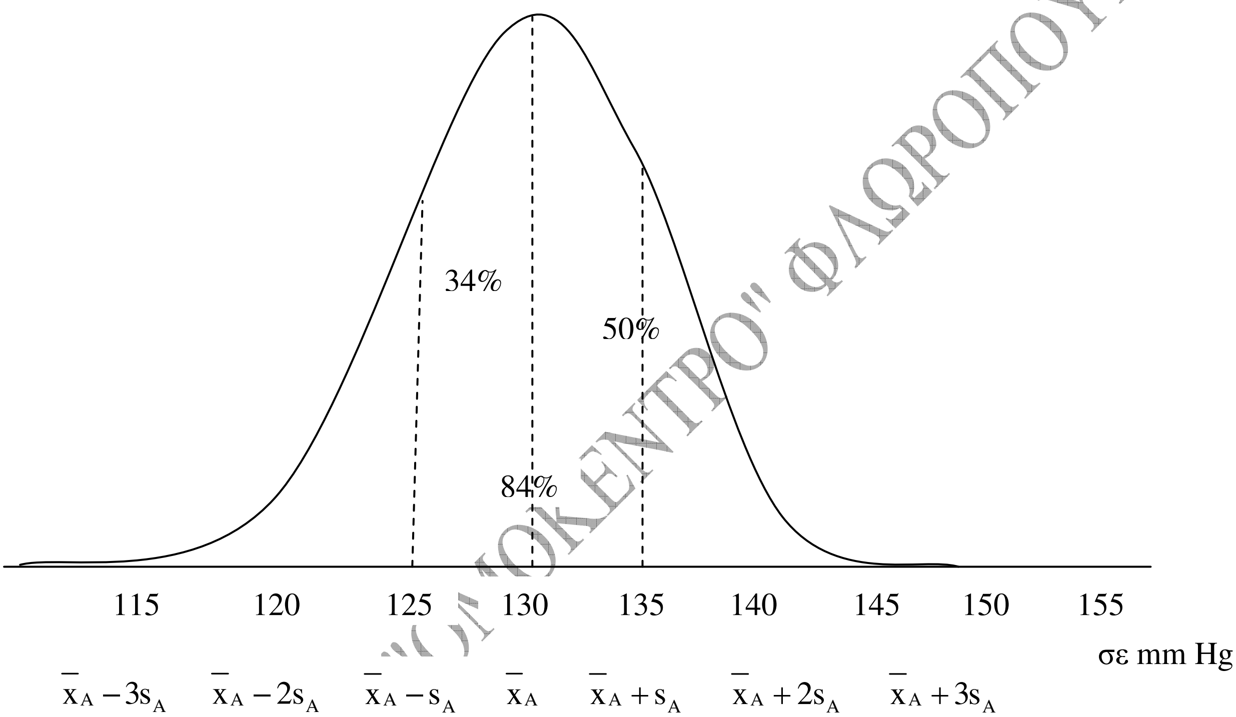
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{5x-5}{2\sqrt{x+3}-4}\right)=\lim_{x\to1}\frac{5\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2}=\frac{5\cdot4}{2}=10$$

Έτσι $\delta=13\cdot\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5x-5}{2\sqrt{x+3}-4}\right)=13\cdot10=130$ mm Hg.

Όπως γνωρίζουμε στην κανονική κατανομή, η μέση τιμή χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεων με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες της $\bar{x}$ και το 50% των παρατηρήσεων να είναι μεγαλύτερες ή ίσες της $\bar{x}$. Δηλαδή στην κανονική κατανομή ισχύει ότι η διάμεσος και η μέση τιμή ταυτίζονται έτσι $\delta=\bar{x}=130$ mm Hg.

Αποδεικνύεται ότι στην κανονική κατανομή το 84% έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από 125 mm Hg, άρα πρέπει, $\bar{x}_A - s_A = 125$ mm Hg, όμως $\bar{x} = 130$ mm Hg, άρα $130 - s_A = 125 \Leftrightarrow s_A = 5$ mm Hg.

Έτσι για την κατανομή Α έχουμε:



Για τον συντελεστή μεταβολής $CV_A = \dfrac{s_A}{|\bar{x}_A|} = \dfrac{5}{130} = \dfrac{1}{26} < \dfrac{1}{10}$, άρα το δείγμα Α είναι ομοιογενές.

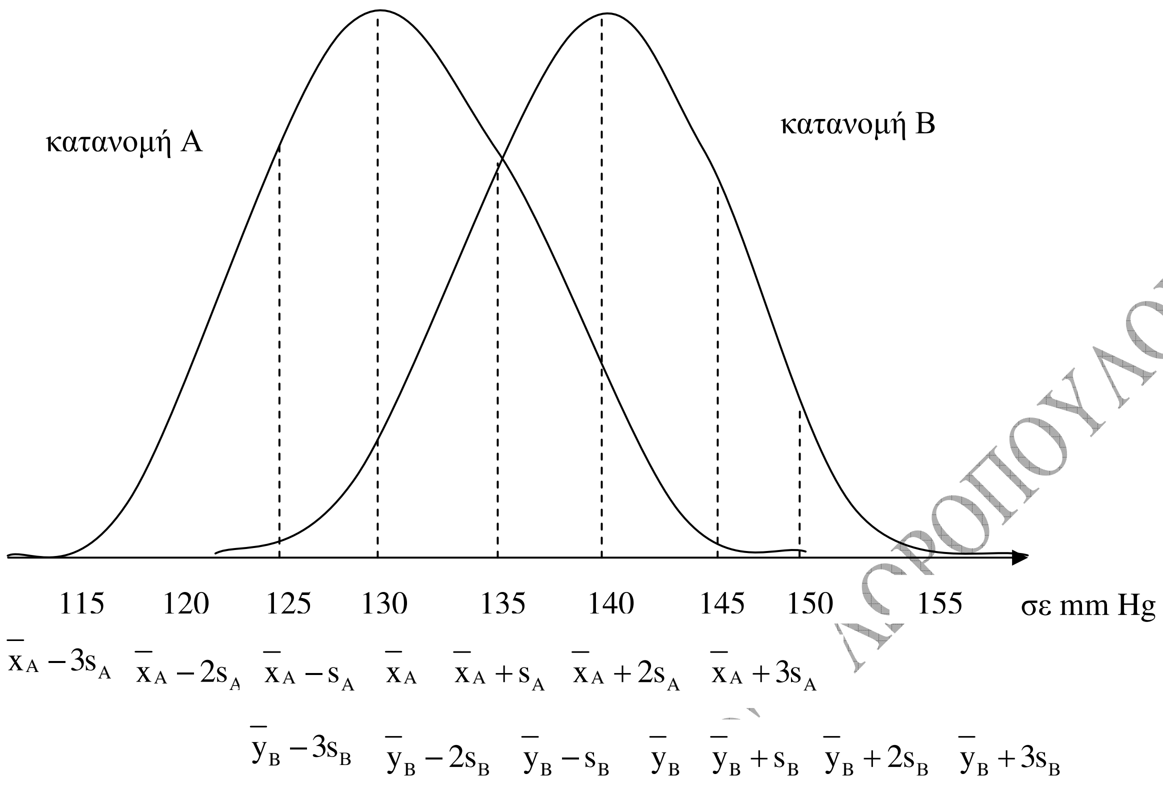
Γ2. α) Για το δείγμα Β ξέρουμε ότι κάθε άτομο του δείγματος αυτού παρουσιάζει συστολική πίεση $y_i = x_i + 10$ σε mm Hg, για κάθε i= 1, 2, …, ν, σε σχέση με τη συστολική πίεση x_i των ατόμων του δείγματος Α.

Άρα, από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, θα ισχύει ότι

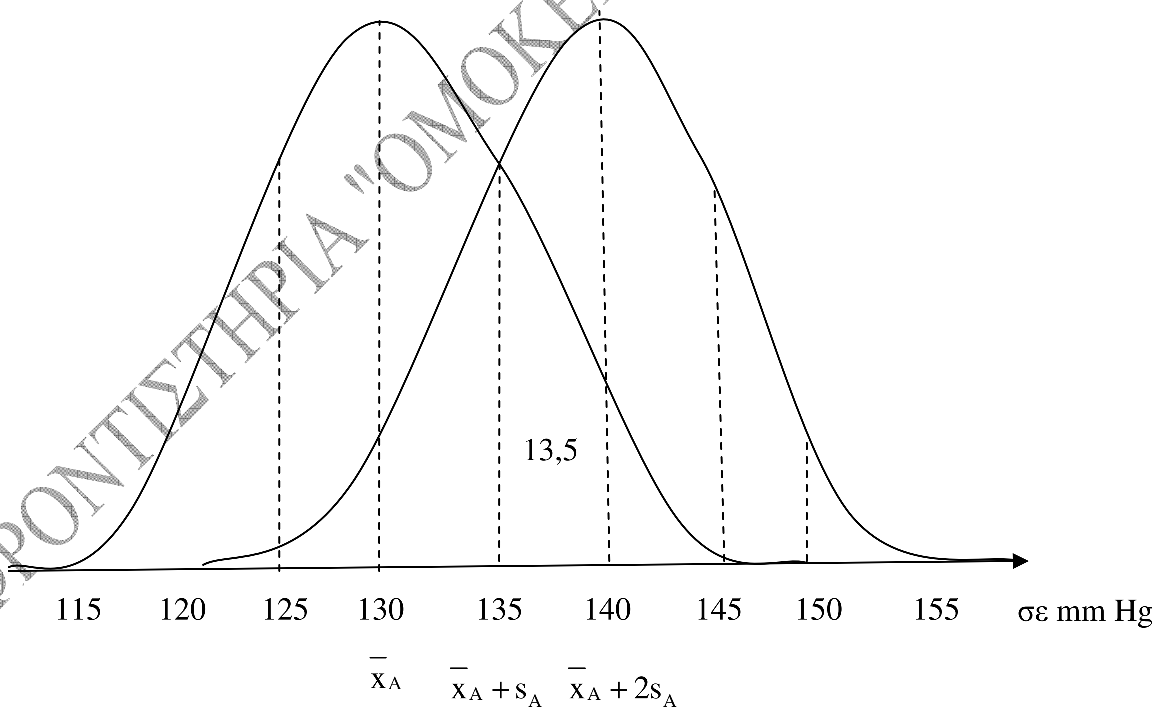
$\bar{y}_B = \bar{x}_A + 10 = 130 + 10 = 140$ mm Hg.

Ενώ $s_B = s_A = 5$ mm Hg.

Οπότε $CV_B = \dfrac{s_B}{|\bar{y}_B|} = \dfrac{5}{140} < \dfrac{5}{130} = CV_A$, έτσι το δείγμα Β παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια σε σχέση με το δείγμα Α.



β)



i) Από την υπόθεση έχουμε ότι το πλήθος των ατόμων του δείγματος Α, στο διάστημα $\left[\bar{x}_A + s_A, \bar{x}_A + 2s_A\right]$, είναι ίσο με 540, όμως το παραπάνω διάστημα περιέχει το 13,5% του πλήθους νΑ των ατόμων της κατανομής Α, άρα

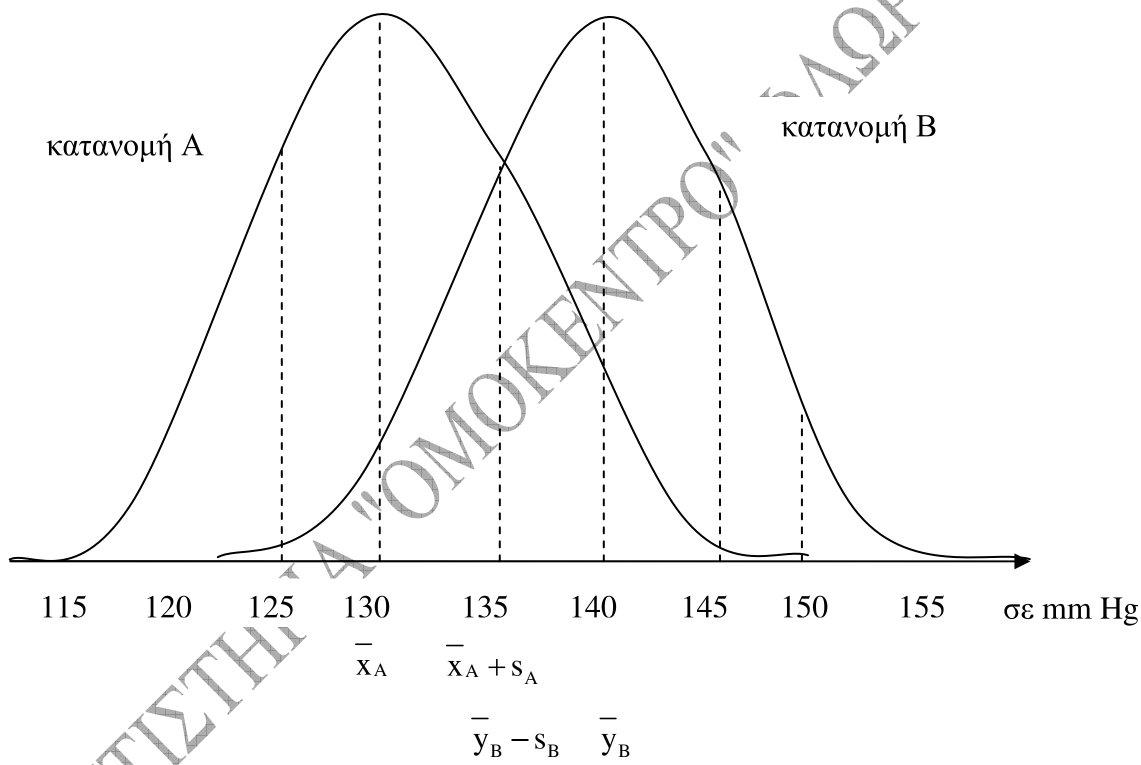
$13{,}5\%\ v_A=540 \Leftrightarrow \frac{13{,}5}{100}v_A=540 \Leftrightarrow 13{,}5v_A=54.000$.

Δηλαδή $v_A=\frac{54000}{13{,}5}=4000$, έτσι $v_A=v_B=4.000$ άτομα.

ii) Οπότε συνολικά και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω από 135 mm Hg.

- Το 84% των ατόμων της κατανομής Α
- Το 16% των ατόμων της κατανομής Β

Άρα συνολικά $\frac{84}{100}4.000+\frac{16}{100}4.000=4.000$ άτομα



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) $f'(x)=\frac{-2\alpha x}{\left(\alpha x^2+1\right)^2}$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης $(\varepsilon): y=-\frac{1}{2}x+\beta$ είναι $\lambda=-\frac{1}{2}$ και ισούται με την παράγωγο της f στο $x_0=1$, επομένως είναι:

$f'(1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{-2\alpha}{(\alpha+1)^2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow (\alpha+1)^2=4\alpha\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \alpha=1$, οπότε η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ και είναι $f(1)=\frac{1}{2}$.

Για x=1 και $y=\frac{1}{2}$ στην (ε) βρίσκουμε: $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\beta\Leftrightarrow \beta=1$.

β) $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f΄(x)		+		-	
f(x)		↗	τ.μ.	↘	

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο x=0 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο f(0)=1, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο, αφού για $x\geq 0$ είναι $f(x)\leq f(0)=1$ και για $x\geq 0$ είναι $f(x)\leq f(0)=1$, δηλαδή για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)\leq f(0)=1$.

Δ2. α) Αν A ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει $0\leq P(A)\leq 1$, οπότε πρέπει $0\leq y\leq 1$,

$$0\leq -\frac{1}{2}x+1\leq \Leftrightarrow 0\leq -x+2\leq 2\Leftrightarrow -2\leq -x\leq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq 2$$

β) Είναι $y_1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+1=\frac{4}{5}$

$$y_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+1=\frac{3}{5}$$

$$y_3=-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}+1=\frac{3}{10}$$

Οπότε $\{y_1, y_2, y_3\}=\left\{\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{10}\right\}$

i) Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $(A\cap B)'$, $A\cup B$, και A είναι οι αριθμοί $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, όχι απαραίτητα με την ίδια σειρά.

Η αύξουσα σειρά αυτών των αριθμών είναι $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$.

Είναι $A\subseteq AB$, οπότε $P(A)\leq P(A\cup B)$.

Αν $P(A)=\frac{3}{5}$ και P(A∪B)= $\frac{4}{5}$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να είναι P((A∩B)΄)= $\frac{3}{10}$, αλλά τότε 1-P(A∩B)= $\frac{3}{10}$⇔P(A∩B)=$\frac{7}{10}$>P(A) που είναι άτοπο γιατί ισχύει P(A∩B)≤P(A), αφού A∩B⊆A.

Αν P(A)= $\frac{3}{10}$ και P(A∪B)= $\frac{4}{5}$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να είναι P((A∩B)΄)= $\frac{3}{10}$, αλλά τότε 1-P(A∩B)= $\frac{3}{5}$⇔P(A∩B)=$\frac{2}{5}$>P(A) που είναι άτοπο γιατί ισχύει P(A∩B)≤P(A), φού A∩B⊆A.

Επομένως είναι: P(A)= $\frac{3}{10}$, P(A∪B)= $\frac{3}{5}$ και P((A∩B)΄)= $\frac{4}{5}$.

Επειδή είναι P((A∩B)΄)=1-P(A∩B), τότε P(A∩B)=1- P((A∩B)΄)=1-$\frac{4}{5}$=$\frac{1}{5}$.

ii) Είναι P(A∩B΄)=P(A-B)=P(A)-P(A∩B)= $\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$ (3)

Επίσης είναι A-B΄=A∩B΄΄=A∩B, οπότε P(A-B΄)=P(A∩B)= $\frac{1}{5}$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι P(A∩B΄)<P(A-B)΄ και αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0, +∞), τότε f(P(A∩B΄))>f(P(A-B΄)).

iii) Είναι P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B)⇔ P(B)=P(A∪B)+P(A∩B)-P(A)⇔

⇔P(B)= $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}-\frac{3}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ (1)

Επίσης, B∩Γ⊆γ, άρα P(B∩Γ)≤P(Γ)⇔ P(B∩Γ)≤ $\frac{3}{10}$⇔

- P(B∩Γ)≥- $\frac{3}{10}$⇔P(B)-P(B∩Γ)≥- $\frac{3}{10}$⇔

⇔P(B-Γ)≥ $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}$⇔ P(B-Γ)≥ $\frac{2}{10}$⇔ P(B-Γ)≥ $\frac{1}{5}$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$\frac{1}{5}$≤ P(B-Γ)≤ $\frac{1}{2}$.