

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
  - $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,
- να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathcal{R}$  ισχύει:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y \in f(A).$$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

δ) Η συνάρτηση  $f(x) = x^a$ ,  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

ε) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό ελάχιστο της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x - e^x$  και  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \ln x$ .

B1. Να βρείτε την συνάρτηση  $f \circ g$ .

Μονάδες 5

**B2.** Αν  $\varphi(x)=(f \circ g)(x)=\ln x-x, x>0$ .

Να μελετήσετε την  $\varphi$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να δείξετε ότι η  $\varphi$  είναι κοίλη, να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$  και να την σχεδιάσετε.

**Μονάδες 7**

**B4. i)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $\varphi$ .

**ii)** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{\ln x}{x} = \frac{2026}{x} + 1$  είναι αδύνατη στο  $(0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=e^x-\lambda x, x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ .

**Γ1.** Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι  $f(\ln \lambda)=\lambda(1-\ln \lambda), \lambda > 0$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της  $f$  παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της όταν  $\lambda=1$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να δείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) για την οποία ισχύει  $e^x \geq \lambda x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι η  $\lambda=e$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Για  $\lambda=e$

**i)** Να δείξετε ότι η ευθεία  $y=\lambda x$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x)=e^x, x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 3**

**ii)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$  την εφαπτομένη της  $C_g$  του ερωτήματος (i) και την ευθεία  $x=0$ .

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right), & x > 0 \\ a, & x = 0, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Δ1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$  αν είναι γνωστό ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x=0$ .

**Μονάδες 4**

Για  $a=0$

**Δ2. i)** Δείξτε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=0$ .

**ii)** Δείξτε ότι  $\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) > \frac{1}{x+1}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

iii) Δείξτε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 3x3=9**

Δ3. Θεωρούμε την εξίσωση  $f(2 + \eta\mu x) = f\left(2 + \frac{x-1}{x+1}\right)$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .

i) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα  $x_1 \in (1, \pi)$  και μια τουλάχιστον ρίζα  $x_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ .

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε  $\sin x_0 - \frac{2}{(x_0+1)^2} = 0$

**Μονάδες 2x4=8**

Δ4. Δείξτε ότι

$$\int_1^3 f(x) dx > 2 - \ln 2$$

**Μονάδες 4**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**