



#### ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, \left( \vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\kappa = -2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

#### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \left( \vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\beta) \text{ i) } \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa \text{ οπότε } \vec{\beta} \cdot \left( \frac{\kappa}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta} \right) = \kappa \text{ ή } \frac{\kappa}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \kappa \text{ ή } \frac{\kappa}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = \kappa$$

$$\text{Άρα } \frac{\kappa}{2} \cdot 1 - 1 = \kappa \Leftrightarrow \kappa - 2 = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = -2.$$

ii) Για  $\kappa = -2$  είναι  $\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  οπότε

$$|\vec{\gamma}|^2 = \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} = (-\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (-\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + 2 \cdot 1 + |\vec{\beta}|^2 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$\text{Οπότε } |\vec{\gamma}| = \sqrt{7}.$$

$$\text{iii) Είναι } (3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} =$$

$$3 \cdot 1 - 3(-5) + 2(-2) - 2\sqrt{7}^2 = 3 + 15 - 4 - 14 = 0$$

$$\text{(Έχουμε } \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot (-\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = -\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -2^2 - 1 = -5)$$

$$\text{Οπότε } (3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}) \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$$