ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες ε_1:2χ-ψ-10λ+16=0 και ε_2:10χ+ψ-2λ-4=0, όπου $\lambda \in R$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής του Μ

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε: 8χ+ψ-6=0

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ

(Μονάδες 5)

ii) αν Κ είναι τυχαίο σημείο ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(\mathrm{KAB}) = \frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $2x - y = 10\lambda - 16$

$\underline{10x + y = 2\lambda + 4}$ (προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:)

$12x = 12\lambda - 12 \Leftrightarrow \boxed{x=\lambda-1}$ οπότε

$2(\lambda-1) - y = 10\lambda - 16 \Leftrightarrow 2\lambda - 2 - 10\lambda + 16 = y \Leftrightarrow y = -8\lambda + 14$

Οπότε οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται στο σημείο Μ(λ-1, -8λ+14)

β) Έστω ότι το Μ ανήκει στην ε τότε ισχύει 8(λ-1)+(-8λ+14)-6=0 $\Leftrightarrow$

8λ-8-8λ+14-6=0 $\Leftrightarrow$ 0λ=0 ισχύει για κάθε $\lambda \in R$

Άρα το Μ ανήκει στην ε για κάθε $\lambda \in R$.

γ) Η ε τέμνει τον x΄x όταν y=0 δηλαδή $8x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$. Άρα $A\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

Η ε τέμνει τον y΄y όταν x=0 δηλαδή y-6=0 $\Leftrightarrow$ y=6.

Άρα Β(0, 6)

i) Ο τύπος της ζ είναι y=λx και $\lambda_\zeta = \lambda_{AB} = \frac{6-0}{0-\frac{3}{4}} = \frac{-24}{3} = -8$. Άρα ζ: y= -8x

ii) Έστω Κ σημείο της ζ τότε Κ(x, -8x)

$\overrightarrow{AK} = \left(x - \frac{3}{4}, -8x\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{4}, 6\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} x-\frac{3}{4} & -8x \\ -\frac{3}{4} & 6 \end{vmatrix}=6x-\frac{18}{4}-6x=-\frac{18}{4}$$

$$\text{Άρα } (KAB)=\frac{1}{2}\left|-\frac{18}{4}\right|=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}\ \text{τ.μ.}$$