

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 29 Νοεμβρίου 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Μονάδες 7

A2. i) Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Μονάδες 2

ii) Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 2

A3. i) Να απαντήσετε με (Σ) αν είναι σωστός και (Λ) αν είναι λανθασμένος ο ισχυρισμός:

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδα 1

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

A4. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή παρακάτω πρόταση.

i) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta]$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε:

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο διάστημα (α, β)

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (α, β)

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις στο διάστημα (α, β)

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α, β) .

Μονάδες 5

ii) Για μια συνεχή και γν. φθίνουσα συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της είναι

α. $(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(\alpha)]$

β. $(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$

$$\gamma. \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

$$\delta. [f(\beta), f(\alpha)]$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ και}$$

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \ln x.$$

B1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2) .

Μονάδες 8

B3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\phi=g \circ f$.

Μονάδες 6

B4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο

$$h(x) = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right).$$

Αν $\phi(x)=\ln x - \ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$, να εξετάσετε αν $\phi=h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0)=1$, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)=1+2xf(x)$, για κάθε $x \geq 0$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 8

Γ3. Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f(\beta)}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 4

Γ4. Δείξτε ότι $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

■ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 1$

■ $g(x) = x \ln x$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + 3h) - f(5)}{h} = 3f'(5)$$

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(1)=2$ και $f'(1)=1$ και να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$$

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο $x_0=1$ είναι η ευθεία $\epsilon: y=x-1$.

Μονάδες 5

Δ4. i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Μονάδες 3

ii) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{(e^x - 1)\eta\mu x}$$

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία!!!