

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 εφαπτομένες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ϵ εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις ϵ_1 και ϵ_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

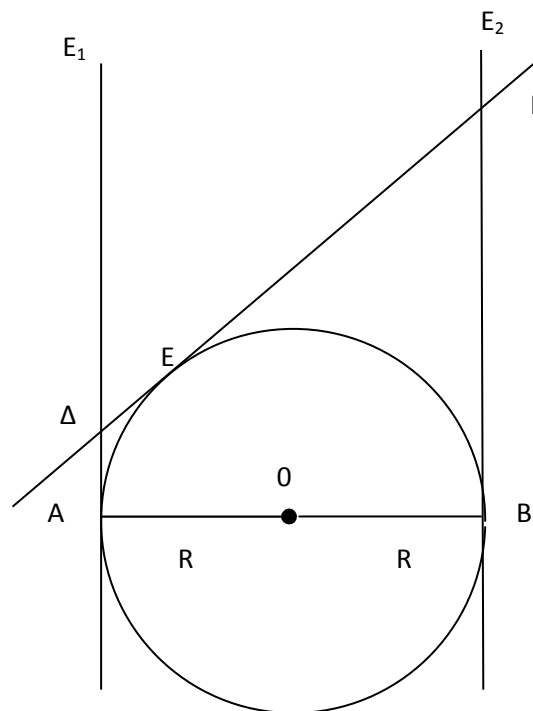
ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

(Μονάδες 9)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

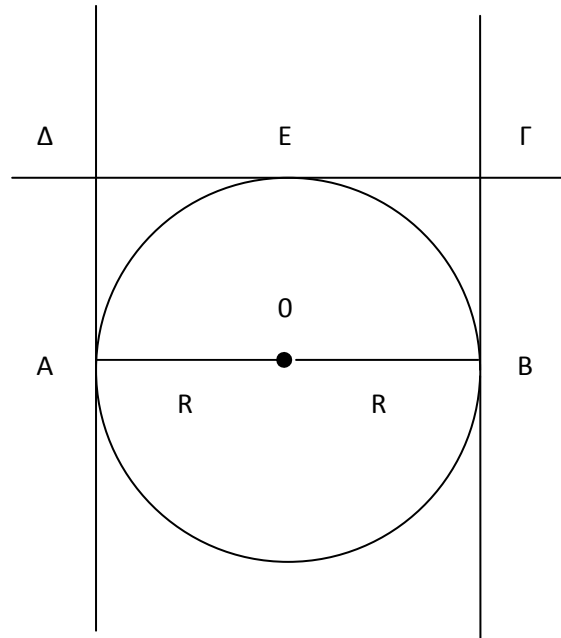


α) $A\Delta \parallel B\Gamma$ γιατί οι εφαπτομένες είναι κάθετες στις ακτίνες στα σημεία επαφής.

$$\Gamma\Delta = \Gamma E + \Delta E = \Gamma B + A\Delta$$

($\Gamma E = \Gamma B$, $\Delta E = \Delta A$ τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα)

β)



$$\begin{aligned} AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A &= 2R + \Gamma E + 2R + \Delta E = 2R + 2R + \Gamma\Delta \\ &= 2R + 2R + 2R \\ &= 6R \end{aligned}$$