

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 1 Οκτωβρίου 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Δείξτε ότι

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$$

είναι η f παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες.

Μονάδες 4

A3. Έστω f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $(\eta \mu x) = -\sigma \upsilon \nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ .

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

ε) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = -\infty$, v άρτιος

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=e^x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f είναι η συνάρτηση $(f \circ g)(x)=\ln(e^x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

B2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\log$ είναι αντιστρέψιμη (μονάδες 2) και να βρείτε τη συνάρτηση $h=(\log)^{-1}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Αν $h(x)=\ln(e^x-1)$, $x>0$ τότε:

B3. Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και να βρείτε το διάστημα όπου η γραφική παράσταση της h βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=\ln 2$.

Μονάδες 8

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις που είναι συνεχείς και ισχύουν $f^2(x)=3x^2+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$ και $xg(x)+2=g(x)+f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Δείξτε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. Δείξτε ότι $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ3. Δείξτε ότι $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \frac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ4. Δείξτε ότι η εξίσωση $4g(x)=7x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Μονάδες 7

Δ2. Για $\alpha=3$ και $\beta=-2$ να δείξετε ότι η εξίσωση $10 f(x) = -7x+1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0, 1]$.

Μονάδες 6

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{f(x) + 1}$, $x \in [0, 1]$. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)}$

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία!!!