ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και g(x)=λx+(1-λ), $x \in \mathbb{R}$

και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 0$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)2=|x_1+x_2|+2$.

(Μονάδες 9)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) Κοινά σημεία έχουμε όταν f(x)=g(x) ή

$x^2=\lambda x+(1-\lambda) \Leftrightarrow x^2-\lambda x-(1-\lambda)=0$

$\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot 1[-(1-\lambda)]=\lambda^2+4-4\lambda=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

β) Για να έχουμε ένα μόνο κοινό σημεί πρέπει Δ=0 δηλαδή $(\lambda-2)^2=0$

$\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$

Για λ=2   Δ=0 και

$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Για x=1: f(1)=1 άρα το σημείο είναι A(1, 1)

γ) $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-\lambda)}{1} = \lambda$ οπότε

$\lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0$ θέτουμε $|\lambda|=\omega$

Άρα $\omega^2-\omega-2=0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1(-2) = 1+8 = 9$

$\omega_1=2$

$\omega_{1,2} = \frac{1\pm 3}{2}$

$\omega_2= -1$

Άρα $|\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda= -2$ ($\lambda=2$ Απορρίπτεται) και $|\lambda|= -1$ ΑΔΥΝΑΤΗ