ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: x^2-2(λ-1)x+λ+5=0   (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=4\lambda^2-12\lambda-16.$$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d\left(x_1, x_2\right)=\sqrt{24}\,.$$

(Μονάδες 8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) $\Delta=\left[-2\left(\lambda-1\right)\right]^2-4\cdot1\left(\lambda+5\right)=4\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)-4\lambda-20=$
$4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20=4\lambda^2-12\lambda-16$

β) Πρέπει Δ>0 δηλαδή $4\lambda^2-12\lambda-16>0$ ή $\lambda^2-3\lambda-4>0$

$$\Delta=\left(-3\right)^2-4\cdot1\left(-4\right)=9+16=25$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm5}{2}$$

$\lambda_1=4$

$\lambda_2= -1$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
λ^2-3λ-4		+		-		+	

γ) $d(x_1, x_2)=\sqrt{24}$ ή $|x1-x2|=\sqrt{24}$ (2)

$$x_{1,2}=\frac{2(\lambda-1)\pm 2\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}}{2}$$

$x_1=\lambda-1+\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}$

$x_2=\lambda-1-\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}$

Η (2) γίνεται $\left|\lambda-1+\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}-\lambda+1-\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}\right|=\sqrt{24}$

$\left|2\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}\right|=\sqrt{24}\Leftrightarrow 2\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{\lambda^2-3\lambda-4}=\sqrt{6}$ ή $\lambda^2-3\lambda-4=6\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0$

Δ=9+40=49 και

$$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm 7}{2}$$

λ_1=5 Δεκτή

λ_2= -2 Δεκτή