

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.
(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$ όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

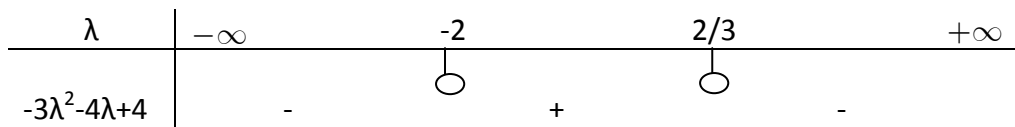
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) Πρέπει $\Delta \geq 0$ ή $(-\lambda)^2 - 4 \cdot 1(\lambda^2 + \lambda - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \quad (I)$$

$$\Delta' = (-4)^2 - 4(-3)(+4) = 16 + 48 = 64$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{12}{-6} = -2 \\ \lambda_2 = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$



$$\text{Άρα } \lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right] \quad (1)$$

$$\beta) S = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{\lambda}{1} = \lambda$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{1} = \lambda^2 + \lambda - 1 \text{ οπότε}$$

$$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \leq -1}$$