

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα σχολικού βιβλίου σελ. 186.

A2. Θεώρημα σχολικού βιβλίου σελ. 76.

A3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 161.

A4. **α)** Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+2\alpha x+9$. Οπότε $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3+2\alpha+9=0$ άρα $2\alpha=-12$. Οπότε $\alpha=-6$.

B2. Για $\alpha=-6$ έχουμε $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ και $f'(x)=3x^2-12x+9$, $x \in \mathbb{R}$. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$ και οι ρίζες και το πρόσημο της f' δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	○	-	○	+
$f(x)$						
		$\tau.\mu.$		$\tau.\epsilon.$		

$$\Delta 1 = [0, 1]$$

Η f είναι συνεχής στο $\Delta 1$ και $f(0) \cdot f(1) < 0$. Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Το x_1 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γν. αύξουσα στο $\Delta 1$.

$$\Delta 2 = [1, 3]$$

Η f είναι συνεχής στο $\Delta 2$ και $f(1) \cdot f(3) < 0$. Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_2 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Το x_2 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γν. φθίνουσα στο $\Delta 2$.

$$\Delta 3 = [3, +\infty)$$

Η f είναι συνεχής στο $\Delta 3$ και $f(3) = -3 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Οπότε $f(\Delta 3) = [-3, +\infty)$. Το 0 περιέχεται στο $f(\Delta 3)$ οπότε υπάρχει $x_3 \in \Delta 3$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$. Το x_3 είναι μοναδικό αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $\Delta 3$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 θετικές ρίζες.

B3. $f''(x) = 6x - 12$ οι ρίζες και το πρόσημο της f'' δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$, η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ το σημείο $M(2, f(2))$ είναι σημείο καμπής της C_f , $f(2) = -1$.

B4. Η εφαπτομένη C_f στο A είναι $\psi - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$

Η εφαπτομένη της C_f στο B είναι $\psi - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi)$. Επειδή $g(\xi) = \xi + f(\xi)$ και $g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$ λύνουμε το σύστημα των δύο ευθειών όπου προκύπτει $x = 0$. Άρα οι ευθείες τέμνονται στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$ και $f(0) = 0$ τότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x(\sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x}} = +\infty$$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. Για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Άρα η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη στη Cf στο $+\infty$.

Για $x \rightarrow -\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = 0 = \lambda \text{ (με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0 = \beta \text{ (με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής)}$$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

Θεωρούμε τη $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$ και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο $[-\pi, 0]$.

Αφού $g(0) < 0$ και $g(-\pi) > 0$ και η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Γ4. Έστω $M(x, y)$, $y = f(x)$ με $x > 0$.

Το M κινείται άρα γίνεται $M(x(t), y(t))$, $y(t) = f(x(t))$

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' \Rightarrow y'(t) = \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε $y'(t)=x'(t)$ άρα $x'(t_0)=\frac{2x(t_0) \cdot x'(t_0)+x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} \Rightarrow 2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=2x(t_0)+1 \Rightarrow$

$0=1$ αδύνατο. Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 .

ΘΕΜΑ Δ

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x)=\left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}}\right)' = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} =$

$$= \frac{xf(x) - 2F(x)\ln x}{x^{\ln x}} = 0$$

Άρα η g είναι σταθερή.

Δ2. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$i) (xf(x))' = (2F(x)\ln x)' \Rightarrow f'(x) = \frac{2xf(x)\ln x + 2F(x) - x \cdot f(x)}{x^2} = 0$$

Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, είναι και συνεχής. Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

αφού για $x=1$ από την σχέση $xf(x)=2F(x)\ln x$ προκύπτει $f(1)=2F(1) \cdot \ln 1=0$.

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (x f'(x)) = f'(1) = 2 \text{ αφού η εφαπτομένη στο } M(1, f(1)) \text{ είναι παράλληλη στη } y=2x.$$

ii) Η F είναι συνεχής στο $x_0=1$,

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{DLH}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + xf'(x)}{\frac{2}{x}} = \frac{f(1) + f'(1)}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

Επειδή η g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow$

$$\frac{F(x)}{x \ln x} = c \Leftrightarrow F(x) = cx^{\ln x}$$

και αφού $F(1) = 1$, τότε $c = 1$.

Άρα $F(x) = x^{\ln x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ3. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = \frac{2e^{\ln^2 x} \cdot \ln x}{x}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Για $0 < x < 1$ είναι $F'(x) < 0$ και αφού F συνεχής στο $(0, 1]$ τότε η F είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Για $x > 1$ είναι $F'(x) > 0$ και αφού F συνεχής στο $[1, +\infty)$ τότε η F είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = F(x^2) - F(x) + (x - 1)^2, x \in (0, +\infty)$$

- $h(1) = 0$

- Για $0 < x < 1$ έχουμε $0 < x^2 < x < 1$ και αφού F γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ ισχύει $F(x^2) > F(x)$ και επειδή $(x-1)^2 > 0$ τότε $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

- Για $x > 1$ έχουμε $x^2 > x > 1$ και αφού F γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ισχύει $F(x^2) > F(x)$ και επειδή $(x-1)^2 > 0$ τότε $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Άρα η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0 \Leftrightarrow F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$.

Δ4. Η F είναι συνεχής στο $[1, e]$ και αφού F γν. αύξουσα στο $[1, e]$ τότε $F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 1 > 0$.

Άρα

$$E = \int_1^e F(x)dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$$

Επειδή $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν θέσουμε όπου x στο $\ln^2 x$ παίρνουμε $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$

για κάθε $x > 0$ (με το ισον να ισχύει μόνο για $x=1$).

$$\text{Άρα } \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow E > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

Έχουμε:

$$\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \dots = 2e - 3$$

Επομένως $E > 2e - 3$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΜΠΑΚΑΣ Ν. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. - ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. - ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr