ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ
Α. Φλωρόπουλου
30 ΧΡΟΝΙΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ
για μαθητές με απαιτήσεις
http://www.floropoulos.gr - email: info@floropoulos.gr
•ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42
• ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 22 Μαρτίου 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 133

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 162

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 142

Α4. α) Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

$$\boldsymbol{B1}.\ f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}, x\in IR$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$

x	-∞	0	+∞
f''(x)	-	0	+
f(x)	↘	0 ΕΛΑΧ.	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0] γνησίως αύξουσα στο [0, +∞) και παρουσιάζει ελάχιστο για x=0 με τιμή f(0)=0.

$$\boldsymbol{B2}.\ f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}, x\in IR$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 1-3x^2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↷	ΣΚ	↶	ΣΚ	↷	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$, κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$, κοίλη στο $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$.

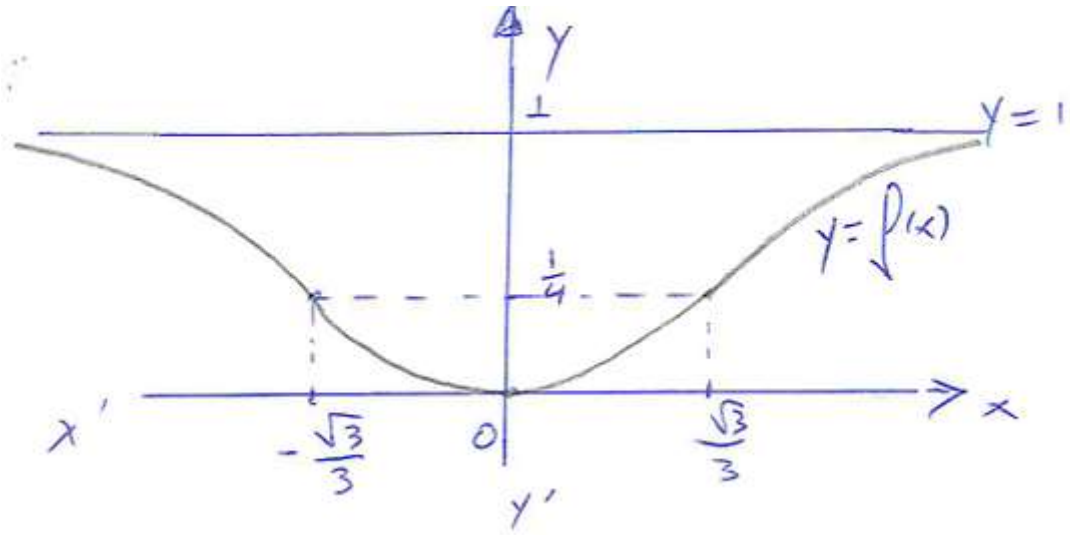
Σημεία καμπής: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

$\boldsymbol{B3}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 = \beta$

Άρα y=1 οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞.

Ομοίως στο -∞



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(x^2+9)\cdot f'(x)+2xf(x)=1 \Leftrightarrow [(x^2+9)\cdot f(x)]'=(x)' \Leftrightarrow (x^2+9)\cdot f(x)=x+c(1)$, $c\in IR$

Για x=0: $9f(0)=c \Leftrightarrow c=0$

Από (1): $(x^2+9)\cdot f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{x^2+9}$

Γ2. $f'(x) = \frac{x^2+9-x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}, x \in IR$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$

x	-∞		-3		3		+∞
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘		↗		↘	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞, -3], γνησίως αύξουσα στο [-3, 3], γνησίως φθίνουσα στο [3, +∞).

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+9}\cdot lnx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot lnx}{x^2+9}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x\cdot lnx)'}{(x^2+9)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx+1}{2x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(lnx+1)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$

Γ4. $\text{Έστω } f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+9}=0\Leftrightarrow x=0$

$f(x)=\frac{x}{x^2+9}\geq 0\ \sigma\tau o\ [0,1]$

$E=\int\limits_0^1\frac{x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{2x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{(x^2+9)'}{x^2+9}dx=$

$=\frac{1}{2}[\ln(x^2+9)]_0^1=\frac{1}{2}(ln10-ln9)=\frac{1}{2}ln\frac{10}{9}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $xf(x)-e^x+\ln(x^2+1)+1\geq 0$, $x\in IR$

Θεωρούμε $\phi(x)=xf(x)-e^x+\ln(x^2+1)+1$, $x\in IR$

- $\phi(x)\geq\phi(0)$. Η φ παρουσιάζει για x=0 ελάχιστο
- $\phi'(x)=f(x)+x\cdot f'(x)-e^x+\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in IR$

$\phi'(0)=f(0)-1$

Από θ. Fermat $\phi'(0)=1\Rightarrow f(0)=1$

Δ2. $(f^2(x))'\neq 0\Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και $f'(x)\neq 0$

$$\int_{f(0)}^{f(1)-1} f(x)dx = 0 \text{ και επειδή } f(x) \neq 0: f(1) - 1 = f(0) \Rightarrow f(1) - 1 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1). Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει 1 τουλάχιστον ξ∈(0, 1) ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 > 0.$$

Επίσης η f' είναι συνεχής στο IR και f'(x)≠0 για κάθε x∈IR οπότε η f' διατηρεί το πρόσημό της στο IR. Αφού f'(ξ)>0 θα ισχύει: f'(x)>0, x∈IR. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ4.Θέτουμε: u=f^{-1}(x)⇔ $x = f(u)$, dx=f'(u)du.

Για x=1, u=0

x=2, u=1

Οπότε:

$$\int_1^2 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 u \cdot f'(u)du = \int_0^1 xf'(x)dx = [x\, f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx =$$

$$= 2 - \int_0^1 f(x)dx$$

Άρα :

$$\int_1^2 f^{-1}(x)dx = 2 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f^{-1}(x)dx = 2.$$