ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 25 Ιανουαρίου 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελίδα 133

Α2. Θεωρία σχολικό σελίδα 73

Α3. Θεωρία σχολικό σελίδα 128

Α4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_h = A_{fog} = \{x \in A_g \ / \ g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \leq 1\} = [0,\ 1]$

$$h(x) = (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β2. Για κάθε $x_1,\ x_2 \in [0,\ 1]$ με $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \xrightarrow{x \in [0,1\,]} -(x_1 - 1) = -(x_2 - 1) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$\text{Θέτουμε } y = h(x) \Rightarrow y = (x-1)^2 \overset{y \geq 0}{\Longrightarrow} \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow \sqrt{y} = |x-1| \overset{x \in [0,1]}{\Longrightarrow} \sqrt{y} = 1 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

$$\text{Όμως } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \Rightarrow y \leq 1. \text{ Οπότε } f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}, y \in [0,1]$$

Άρα $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

$$\boldsymbol{B3}.\ \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$$

i) Η φ είναι συνεχής στο $[0,\ 1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$

Οπότε η φ είναι συνεχής στο [0, 1] $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=\frac{1}{2}$, $\varphi(0)\neq\varphi(1)$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο [0, 1]

ii) $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$

Από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0, 1)$ ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1\Rightarrow (f(x)-x)^2=x^2+1$

Θεωρούμε $f(x)=f(x)-x$, $x\in IR$

Τότε: $g^2(x)=x^2+1$ (1)

Έστω $g(x)=0\Rightarrow g^2(x)=0\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1$

Αδύνατον. Άρα $g(x)\neq 0$

Επίσης η g είναι συνεχής στο IR ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα διατηρεί το πρόσημο της. $g(0)=f(0)-0=1>0$. Άρα $g(x)>0$.

Από (1): $\sqrt{g^2(x)}=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-1-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$$

Γ2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=2=\lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = 0 = \beta$$

Άρα y=2x πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞.

Γ3. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Γ4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} = [lnf(x)]_0^1 = lnf(1) - lnf(0) = \ln(1+\sqrt{2})$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\frac{10x^3+15x^2+x}{x^4+1} = 1 \Rightarrow 10x^4+15x^2+x = x^4+1 \Rightarrow$

$x^4-10x^3-15x^2-x+1=0$

Θεωρούμε $f(x)=x^4-10x^3-15x^2-x+1$

- Η f είναι συνεχής στο [-1, 0] ως πολυωνυμική f(-1) f(0)<0

Από Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$: $f(x_1)=0$

- Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική f(0) f(1)<0

Από Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1)$: $f(x_2)=0$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $f'(x)=4x^3-30x^2-30x-1$

$f(x_1)=f(x_2)=0$

Από Θ. Rolle η f'(x)=0 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(x_1, x_2) \subseteq (-1, 1)$

Δ3. $\textit{Θέτουμε}: u = \frac{1}{f(x)}, \lim_{x\to+\infty} u = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\eta\mu\frac{1}{f(x)}\ lnf(x)\right] = \lim_{u\to0^+}\left(\eta\mu u\ ln\frac{1}{u}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}(\eta\mu u\ lnu) = -\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\eta\mu u}{u}\ (u\ lnu)\right] \quad (1)$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1,\ \lim_{u\to 0^+}(u\ lnu)=\lim_{u\to 0^+}\frac{lnu}{\frac{1}{u}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{(lnu)'}{\left(\frac{1}{u}\right)}=0$$

$$A\pi ó\ (1):\ \lim_{u\to 0^+}\left[\frac{\eta\mu u}{u}(ulnu)\right]=0$$

$$\mathbf{\Delta 4.}\ \Theta έ\tau o\upsilon\mu\varepsilon:u=\frac{1}{x},du=-\frac{1}{x^2}dx\Rightarrow\frac{1}{x^2}dx=-du$$

Για x= $\frac{1}{2}$: u=2

x=1: u=1

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx=-\int_{2}^{1}f(u)du=\int_{1}^{2}f(u)du=\int_{1}^{2}(u^4-10u^3-15u^2-u+1)du=$$

$$=\left[\frac{u^5}{5}-\frac{5u^4}{2}-5u^3-\frac{u^2}{2}+u\right]_1^2=\cdots\frac{-334}{5}.$$