



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ
Α. Φλωρόπουλου
για μαθητές με απαιτήσεις

http://www.floropoulos.gr - email: info@floropoulos.gr



• ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42
• ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 25 Ιανουαρίου 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι “1-1” (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6)

Μονάδες 9

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$.

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(x) - 2xf(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Μονάδες 9

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-10x^3-15x^2-x+1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{10x^3+15x^2+x}{x^4+1}=1$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία, τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-30x^2-30x-1=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\eta\mu \frac{1}{f(x)} \ln f(x) \right].$$

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε το $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2} dx$.

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία!!!