

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ
Α. Φλωρόπουλου
για μαθητές με απαιτήσεις

http://www.floropoulos.gr - email: info@floropoulos.gr

• ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42
• ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 23 Νοεμβρίου 2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελίδα 106.

A2. Θεωρία σχολικό σελίδα 104.

A3. Θεωρία σχολικό σελίδα 76.

A4. α) $\wedge$, β) Σ , γ) $\wedge$, δ) $\wedge$, ε) $\wedge$

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{6x^2(1+x^2) - 2x^3(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{6x^2 + 2x^4}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{6+2}{(1+1)^2} = 2$$

B2.

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{2x^3}{1+x^2} = 1 \Rightarrow 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (2x^2 + x + 1) = 0$$

Άρα $x=1$.

$$\text{Εξίσωση εφαπτομένης: } y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \Rightarrow y-1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1.$$

B3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x^3}{1+x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{(x-1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (2x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 2 \end{aligned}$$

B4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{1+x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{1+x^2} = 0 = \beta.$$

Άρα $y=2x$ πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Ομοίως στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε

$$g(x) = \frac{x \cdot f(x) + \eta\mu 2x}{x}, x \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

Τότε:

$$x \cdot f(x) + \eta\mu 2x = x \cdot g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) - \frac{\eta\mu 2x}{x}$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) - 2 \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x} \right) = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επίσης $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Άρα η f διατηρεί το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=1>0$ θα ισχύει $f(x)>0, x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

Θεωρούμε: $g(x)=f(x)-x, x \in \mathbb{R}$.

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $g(0)=f(0)=1>0$.

$g(1)=f(1)-1=f(1)-f(0)<0$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

$g(0) \cdot g(1)<0$ οπότε η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad (2)$$

Από $(1)+(2)$: $f(x_1)-x_1 > f(x_2)-x_1 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα οπότε η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Γ4. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $f(A) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (0, +\infty)$ οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) \cdot \eta\mu x| = |f(x) \cdot (\eta\mu x)| = f(x) \cdot |\eta\mu x| \leq f(x)$$

$$\text{Οπότε: } |f(x) \cdot \eta\mu x| \leq f(x) \Rightarrow -f(x) \leq f(x) \cdot \eta\mu x \leq f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ Από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot \eta\mu x) = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \begin{matrix} \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \\ = \\ (DLH) \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Δ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Δ3. $f(1)=0$. Για $x>0$: $f'(x)=\ln x+1$, $f'(1)=1$.

Εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x=1$: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y=x-1$.

Η $y=x-1$ για να εφάπτεται της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ αρκεί:

$$\begin{cases} g(x_0) = x_0 - 1 \\ \text{και} \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_0} + \lambda = x_0 - 1 \\ e^{x_0} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = -1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Δ4. Για $\lambda = -2$: $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (e^x - 2)dx = [e^x - 2x]_0^1 = e - 2(e^0 - 0) = e - 3$.