

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 12 Οκτωβρίου 2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες.

Μονάδες 4

A3. Έστω f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1$

γ) Για κάθε $x > 0$ ισχύει: $(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

ε) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\nu} = -\infty$, ν άρτιος

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x - 2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^x + 1$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3, 2)$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να βρείτε την $f \circ g$. Αν $f \circ g = h$.

Μονάδες 6

B2. Δείξτε ότι η h είναι 1-1.

Μονάδες 6

B3. Δείξτε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1} .

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τα διαστήματα του R όπου η γραφική παράσταση της h^{-1} βρίσκεται πάνω από την ευθεία: $\varepsilon: y = \ln 2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f, g: R \rightarrow R$ δύο συναρτήσεις που είναι συνεχείς και ισχύουν $f^2(x) = 3x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 1$ και $xg(x) + 2 = g(x) + f(x)$ για κάθε $x \in R$.

Γ1. Δείξτε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο R .

Μονάδες 7

Γ2. Δείξτε ότι $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$, $x \in R$.

Μονάδες 6

Γ3. Δείξτε ότι $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \frac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ4. Δείξτε ότι η εξίσωση $4g(x) = 7x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

Δ2. Για $\alpha = 3$ και $\beta = -2$ να δείξτε ότι η εξίσωση $10 f(x) = -7x + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{f(x) + 1}$, $x \in [0, 1]$. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)}$

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία!!!