

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 105.

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 31.

A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 77.

A4. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x-2 > 0\} = (2, +\infty)$

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(x-2) - 1$

B2. $h'(x) = \frac{2}{x-2}, x > 2, h''(x) = -\frac{2}{(x-2)^2} < 0, x > 2$

Άρα η h είναι κοίλη στο $(2, +\infty)$

B3. $h'(x) > 0$ για $x > 2$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$D_{h^{-1}} = h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Για $x > 2$: $y = h(x) \Leftrightarrow y = 2 \ln(x-2) - 1 \Leftrightarrow 2 \ln(x-2) = y+1 \Leftrightarrow$

$\ln(x-2) = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow x-2 = e^{\frac{y+1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y+1}{2}} + 2, y \in \mathbb{R}$

Άρα

$h^{-1}(x) = e^{\frac{y+1}{2}} + 2, x \in \mathbb{R}$

B4. • Η ϕ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

• Η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

• $\phi(-1) = \phi(2) = 0$

Οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ ως παραγωγίσιμη.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

$$\Gamma 2. \text{Για } \lambda = 1: f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \frac{ax + a}{x + a}, & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{x+1} + x}{x + 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(e^{x+1} + x)'}{(x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+1} + 1) = 2$$

(DLH)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{ax + a}{x + a}}{\frac{x + 1}{1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{a}{x + a} = \frac{a}{a - 1}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ οπότε:

$$\frac{a}{a - 1} = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y - 0 = 2 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = 2x + 2$

$$\Gamma 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} = 0 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x + 2} = 2 = \beta$$

Άρα $y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{x+1}}{x} + 1 \right) \stackrel{\left(\frac{0}{-\infty}\right)}{=} 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = 0 = \beta$$

Άρα $y = x$ πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$.

$$\Gamma 4. -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \eta\mu x - 2 \leq -1$$

$$\text{Για } x < -1: f'(x) = e^{x+1} + 1, f''(x) = e^{x+1} > 0$$

Οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty, -1)$ άρα $f(x) \geq 2x + 2$

Θέτουμε όπου $x: \eta\mu x - 2$

$$f(\eta\mu x) \geq 2(\eta\mu x - 2) + 2 \Leftrightarrow f(\eta\mu x) \geq 2\eta\mu x - 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Για κάθε $x, x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x \neq x_0$:

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|} \leq |x - x_0|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0. \text{ Από Κ. Π.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ ή } g'(x_0) = 0. \text{ Άρα } g'(x) = 0,$$

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ οπότε η } g \text{ είναι σταθερή στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{ii) } g(x) = c \Leftrightarrow f(x) \cdot \eta\mu x = c, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{4}: f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} = c \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = c \Leftrightarrow c = 1. \text{ Άρα } f(x) \cdot \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ με

$$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ και 1-1.

$$f(A) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right) = [1, +\infty)$$

$$\text{Δ3. } \blacksquare \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) < f(\alpha) < f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 1 < f(\alpha) < 2 \text{ άρα } f(\alpha) - 2 < 0$$

$$\blacksquare f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} < 0$$

$$\text{Θεωρούμε: } \varphi(x) = (x - \sqrt{2})[f(\alpha) - 2] + \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left[f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right]$$

• Η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$ ως πολυωνυμική

$$\blacksquare \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)(f(\alpha) - 2) > 0$$

$$\varphi(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \varphi(\sqrt{2}) < 0$$

Από Θ. Bolzano η φ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ και επειδή η φ είναι πολυωνυμική συνάρτηση 1^{ου} βαθμού η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

$$\text{Δ4. i) Για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$H'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x}{2} \left(\frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right) = \frac{\eta\mu x}{2} \cdot \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\frac{\eta\mu x}{2} \cdot \frac{2}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} = h(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu x} = f(x)$$

ii) Θεωρούμε $t(x) = 2 - f(x)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{Έστω } t(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \xLeftrightarrow{x \in (0, \frac{\pi}{2}]} x = \frac{\pi}{6}$$

$$t(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} < 2 \Leftrightarrow \eta\mu x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x > \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{6}$$

(Επειδή η $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{\pi}{2}]$)

$$E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} t(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - f(x)) dx = [2x - H(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[2x - \frac{1}{2} \ln(1 - \sigma\upsilon\nu x) + \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma\upsilon\nu x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \dots$$

$$\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$\frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3}) \text{ τ. μονάδες}$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr