

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 11 ΜΑΪΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x)=0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,  
να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f:A \rightarrow \mathcal{R}$  ισχύει:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y \in f(A).$$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

δ) Η συνάρτηση  $f(x)=x^a, a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

ε) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό ελάχιστο της.

Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{x}, x \neq 0 \text{ και } g(x) = \ln x, x > 0$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = \varphi \circ g$ .

Μονάδες 4

♦ Αν  $f(x) = \frac{x}{\ln x}, 0 < x \neq 1$ , τότε

B2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την  $f$  και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 5

B3. Να μελετήσετε την κυρτότητα της  $f$  και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 8

B4. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να τη σχεδιάσετε.

Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$  και το σημείο  $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ . Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση  $g(x) = 1 - \ln x, x > 0$ .

Γ1. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  την απόσταση ενός σημείου  $M(x, y), y = f(x)$  της  $C_f$  από το σημείο  $A$ .

Μονάδες 6

Γ2. Αν  $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}, x \geq 0$  είναι ο τύπος της απόστασης (AM) να βρείτε την τιμή του  $x$  ώστε η απόσταση να γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 7

Γ3. Ένα κινητό  $N$  ξεκινά από το σημείο  $O(0, 0)$  και κινείται στην  $C_f$ . Σε ποιο σημείο της  $C_f$  ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x$  του  $N$  είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του  $N$  αν  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

Μονάδες 6

**Γ4.**

i. Να προσδιορίσετε την fog.

**Μονάδες 3**

ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(fog)x-1}{x-1}$ .

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = e^x - x^2$  και η σχέση:  $2f(\beta) \ln x \leq x - 1$  η οποία ισχύει για κάθε  $x > 0$ .

**Δ1. (i)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της  $f$ .

**Μονάδες 4**

**(ii)** Να δείξετε ότι  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε μοναδικό σημείο  $M(\alpha, 0)$  με  $\alpha \in (-1, 0)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να δείξετε ότι

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \text{ με } \alpha < \beta < 0.$$

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f^2(x)(f(x) - 1)^2$  έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$1 = \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

**Μονάδες 4**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**