ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ) Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 23 Μαρτίου 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. iα) Λ **iβ)** Λ **ii)** Σ **iii)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. i)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

ii)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3}{8}$$

iii)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x+5}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-5)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-5}{2x+1}=-1$$

Β2. i) Για κάθε x_1, $x_2\in$IR με

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-3<x_2-3 \Leftrightarrow e^{x_1-3}<e^{x_2-3}\Leftrightarrow 2e^{x_1-3}<2e^{x_2-3}\Leftrightarrow 2e^{x_1-3}-1<2e^{x_2-3}-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο IR.

ii) Οπότε η f είναι ''1-1'' και αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=2e^{x-3}-1\Leftrightarrow 2e^{x-3}=y+1\Leftrightarrow e^{x-3}=\frac{y+1}{2}\overset{y>-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$lne^{x-3}=ln\frac{y+1}{2}\Leftrightarrow x=ln\frac{y+1}{2}+3$$

$f^{-1}(y) = ln\frac{y+1}{2} + 3$

Άρα

$f^{-1}(x) = ln\frac{x+1}{2} + 3, x > \ -1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) $2x^2 - x - 1 \neq 0\ άρα\ x \neq -\frac{1}{2}\ και\ x \neq 1$

$A = IR - \{-\frac{1}{2}, 1\}$

ii) • $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

• $\ln(x-1)-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e+1$

$A=(1, e+1) \cup (e+1, +\infty)$

iii) $|x-1| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ ή \\ x \leq 0 \end{cases}$

$A=(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Γ2. i) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \ln(x_1-1)+3=\ln(x_2-1)+3 \Leftrightarrow x_1-1=x_2-1 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι ''1-1'' στο $(1, +\infty)$

ii) $\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

• $\sqrt{x-1} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$

$A=[1, 5) \cup (5, +\infty)$

iii) $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)} =$

$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \left(\sqrt{x-1}+2\right) = 4$

Δ2. • 2-x>0⇔x<2

•x+5>0⇔x> -5

A_f=(-5, 2)

(2-x) (x+5)>0

x	-∞		-5		2		+∞
2-x		+		+	0	-	
x+5		-	0	+		+	
Γινόμενο		-	0	+	0	-	

A_g=(-5, 2)

A_f=A_g και για κάθε x∈(-5, 2):

f(x)=ln(2-x)+ln(x+5)=ln[(2-x)(x+5)]=g(x)

Άρα f=g

Δ3. **i**) $A_{fog} = \begin{cases} x \in A_g \\ \kappa\alpha\iota \\ g(x) \in A_f \end{cases} = \begin{cases} x \in IR \\ \kappa\alpha\iota \\ x^2 + x \geq 2 \end{cases} = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

$(fog(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(fog)(x) - 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2\right)\left(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2\right)}{(x^2 - 4)\left(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{(x^2 - 4)\left(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)\left(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 3}{(x + 2)\left(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2\right)} = \dfrac{5}{16}$