

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ
Α. Φλωρόπουλου
 για μαθητές με απαιτήσεις

http://www.floropoulos.gr - email: info@floropoulos.gr

• ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42
 • ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
 (ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ) Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Σάββατο 23 Μαρτίου 2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. iα) Λ iβ) Λ ii) Σ iii) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}$$

ii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3x + 1} - 2)(\sqrt{3x + 1} + 2)}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{3x + 1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{3x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x + 1)(\sqrt{3x + 1} + 2)} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 5)}{(x - 1)(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 5}{2x + 1} = -1$$

B2. i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Leftrightarrow e^{x_1 - 3} < e^{x_2 - 3} \Leftrightarrow 2e^{x_1 - 3} < 2e^{x_2 - 3} \Leftrightarrow 2e^{x_1 - 3} - 1 < 2e^{x_2 - 3} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο \mathbb{R} .

ii) Οπότε η f είναι "1-1" και αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2e^{x-3} - 1 \Leftrightarrow 2e^{x-3} = y + 1 \Leftrightarrow e^{x-3} = \frac{y + 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln e^{x-3} = \ln \frac{y + 1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y + 1}{2} + 3$$

$$f^{-1}(y) = \ln \frac{y+1}{2} + 3$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{x+1}{2} + 3, x > -1$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \text{ i) } 2x^2 - x - 1 \neq 0 \text{ \acute{a}\rho\alpha } x \neq -\frac{1}{2} \text{ και } x \neq 1$$

$$A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$$

$$\text{ii) } \bullet x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \ln(x-1)-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq e+1$$

$$A = (1, e+1) \cup (e+1, +\infty)$$

$$\text{iii) } |x-1| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{ή} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$A = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$\Gamma 2. \text{ i) } \text{Για κάθ}\theta\epsilon x_1, x_2 \in (0, +\infty) \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \ln(x_1-1)+3 = \ln(x_2-1)+3 \Leftrightarrow x_1-1 = x_2-1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι "1-1" στο $(1, +\infty)$

$$\text{ii) } \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ i) } x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\bullet \sqrt{x-1} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$$

$$A = [1, 5) \cup (5, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x-1}+2) = 4 \end{aligned}$$

$$\Delta 2. \bullet 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\bullet x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$$

$$A_f = (-5, 2)$$

$$(2-x)(x+5) > 0$$

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$		
2-x		+	+	○	-	
x+5		-	○	+	+	
Γινόμενο		-	○	+	○	-

$$A_g = (-5, 2)$$

$A_f = A_g$ και για κάθε $x \in (-5, 2)$:

$$f(x) = \ln(2-x) + \ln(x+5) = \ln[(2-x)(x+5)] = g(x)$$

Άρα $f=g$

$$\Delta 3. \text{ i) } A_{f \circ g} = \begin{cases} x \in A_g \\ \text{και} \\ g(x) \in A_f \end{cases} = \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x^2 + x \geq 2 \end{cases} = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)(x) - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}{(x^2 - 4)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x^2 - 4)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{(x + 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)} = \frac{5}{16}$$