ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 23 Μαρτίου 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ. 142

Α2. Θεωρία σχολικό σελ. 162

Α3. Θεωρία σχολικό σελ. 128

Α4. **α)** Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$A_{fog} = \left\{x \in A_g / g(x) \in A_f\right\} = \left\{x \neq 1 \; και \; \frac{x}{1-x} > 0\right\} = (0,1)$$

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = ln\frac{x}{x-1}$$

Β2.

Για $x \in (0,1)$: $h'(x) = \cdots \dfrac{1}{x(x-1)} > 0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1) οπότε και ''1-1'' άρα αντιστρέφεται.

$$y = h'(x) \Rightarrow y = ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Rightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow$$

$$e^y - x \cdot e^y = x \Rightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{e^y}{1+e^y}, y \in IR$$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}, x \in IR$

B3.

Για κάθε $x \in IR$ $\varphi'(x) = \cdots \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

$\varphi''(x) = \cdots \dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \cdots x = 0$

$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	-∞		0		+∞
φ''(x)		+	0	-	
φ(x)			Σ.Κ.		

Η φ είναι κυρτή στο (-∞, 0], κοίλη στο [0, +∞).

Σημείο καμπής $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

B4.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

Άρα y=1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ της C_f στο +∞.

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$$

Άρα y=0 ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ της C_f στο -∞.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$[(x^2+9)\cdot f(x)]' = (x)'$ άρα $(x^2+9)\cdot f(x) = x + c, c \in IR$

Για x=0: c=0.

Άρα $(x^2+9)\cdot f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$

Γ2.

$$f'(x) = \frac{9 - x^2}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

x	-∝		3		3		+∝
f ′(x)		-		+		-	
f (x)		↘		↗		↘	
			T.E.		T.M.		

Η f είναι γν. φθίνουσα στο (-∞, -3], γν. αύξουσα στο [-3, 3] γν. φθίνουσα στο [3, +∞) και παρουσιάζει για x= -3 T.E. με τιμή f(-3)= -$\frac{1}{6}$ και για x=3 T.M. με τιμή $f(3) = \frac{1}{6}$.

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)\cdot lnx] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot lnx}{x^2+9} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x\cdot lnx)'}{(x^2+9)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx+1}{2x} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx+1)'}{(2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$$

Γ4.

Έστω f(x)≥0⇔x≥0

$$E = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+9)'}{x^2+9}dx$$

$$= \frac{1}{2}[ln(x^2+9)]_0^1 = \frac{1}{2}(lm10 - ln9)\ \tau.\mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$.

Θέτουμε g(x)=$\frac{f(x)}{\eta\mu x}$ για x κοντά στο 0,

οπότε $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 1$ και f(x)=$g(x)\cdot\eta\mu x$ για x κοντά στο 0.

Άρα $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot ημx\right) = 1\cdot 0 = 0$ αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R.

Έχουμε $\int_0^{\pi} f(x) + f''(x)ημx\, dx = \pi \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$ οπότε $f(\pi)=\pi$.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot ημx}{x} = 1$$

Δ2. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R έχουμε $\left(e^{f(x)} + x\right)' = \left(f\left(f(x)\right) + e^{x}\right)' \Leftrightarrow$ $e^{f(x)}\cdot f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x) + e^{x}$, $x\in R$ (1)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=x_0$. Από θ. Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$. Οπότε η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται $e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ δηλαδή $f'(0)=0$ ΑΤΟΠΟ αφού $f'(0)=1$. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R.

β) Αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και η f' είναι συνεχής στο R τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Επειδή $f'(0)=1>0$ τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. Είναι $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ αφού f(R)=R και η f είναι γν. αύξουσα στο R.

Για κάθε $x\in(0, +\infty)$ ισχύει $f(x)>f(0)=0$ και

$$\left|\frac{ημx + συνx}{f(x)}\right| = \frac{|ημx + συνx|}{|f(x)|} \leq \frac{|ημx| + |συνx|}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Άρα $-\frac{2}{f(x)} \leq \frac{ημx + συνx}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$ και αφού

$\lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{f(x)} = 0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to +\infty}\frac{ημx + συνx}{f(x)} = 0$

Δ4. Θέτουμε $u=\ln x$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

Για $x=1$: $u=\ln 1=0$

Για $x=e^{\pi}$: $u=\ln e^{\pi}=\pi$

Άρα $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^{\pi} f(u)du$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$ οπότε για κάθε $u \in [0, \pi]$ ισχύει ότι $f(0) \le f(u) \le f(\pi) \Leftrightarrow 0 \le f(u) \le \pi \Leftrightarrow f(u) \ge 0$ και $\pi - f(u) \ge 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα $\int_0^{\pi} f(u)du > 0$ και $\int_0^{\pi}(\pi - f(u))du > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(u)du > 0$ και

$[\pi x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(u)du > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(u)du > 0$ και

$\int_0^{\pi} f(u)du < \pi^2 \Leftrightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(u)du < \pi^2$

Επομένως $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$