ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 27 Ιανουαρίου 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 133

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 73

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 128

Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$A_h = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 \; και \; \sqrt{x} \leq 1\} = [0,1]$

$h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = (x-1)^2$

Β2. Η h είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με h′(x)=2(x-1)<0. Άρα η h είναι $\searrow$ στο [0, 1] και ′′1-1′′.

Θέτουμε:

$$y = h(x) \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y} \xRightarrow{x\in[0,1]} x = 1-\sqrt{y} \Rightarrow h^{-1}(y) = 1-\sqrt{y}$$

Άρα $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}, A_h = h(A) = [h(1), h(0)] = [0,1]$

Β3. i) Η φ είναι συνεχής στο [0, 1) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Οπότε η φ είναι συνεχής και στο $x_0=1$.

φ(0)≠φ(1). Οπότε για κάθε αριθμό n που βρίσκεται μεταξύ των φ(0), φ(1) υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $\varphi(x_0)=n$.

ii)

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$$

Οπότε υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (0,\ 1)$: $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{(DLH)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(0)$$

Γ2. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1$

$$f'(x) \geqq 0 \Leftrightarrow lnx \geqq -1 \Leftrightarrow x \geqq \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f (x)		$\searrow$	ΕΛΑΧ.	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$.

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{e}\right] \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ f(A_1) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right] \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ f(A_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right]$$

$$\text{Άρα } f(A) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right]$$

Γ3.

$$x = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow lnx = lne^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow lnx = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xlnx = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1, x \in (0, +\infty)$$

■ $1 \notin f(A_1)$ οπότε η εξίσωση f(x)=1 δεν έχει ρίζες στο A_1.

■ $1 \in f(A_2)$ οπότε η f(x)=1 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή η f είναι $\nearrow$ στο A_2 θα 'ναι μοναδική.

Γ4. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞). Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [x, x+1] υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (x,\ x+1)$ ώστε $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$.

Όμως $\xi<x+1 \Leftrightarrow f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο [1, +∞) ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (1, +∞) με

$$f'(x) = \sqrt{lnx} + \frac{1}{2\sqrt{lnx}} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1, +∞) και ''1-1''.

Δ2. f(f(x))=e⇔f(f(x))=f(e)⇔f(x)=e⇔f(x)=f(e)⇔x=e

Δ3. Θέτουμε f(x)=u

Οπότε

$$\lim_{u\to+\infty}(u\, e^{-u} \cdot \eta\mu u) = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{e^{u}} \cdot \eta\mu u\right)$$

Όμως

$$-1 \le \eta\mu u \le 1 \Leftrightarrow -\frac{u}{e} \le \frac{u}{e^{u}}\ \eta\mu u \le \frac{u}{e^{u}}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{u}{e^{u}}\right) = \lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^{u}} = 0$$

Από Κ.Π.:

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{e^{u}} \cdot \eta\mu u\right) = 0$$

Δ4.

$$E = \int_{e}^{e^4} f^2(x)dx = \int_{e}^{e^4} x^2 lnx\, dx = \int_{e}^{e^4}\left(\frac{x^3}{3}\right)' lnx\, dx = \left[\frac{x^3}{3}lnx\right]_{e}^{e^4} - \int_{e}^{e^4}\frac{x^3}{3}(lnx)'dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}lnx\right]_{e}^{e^4} - \frac{1}{3}\int_{e}^{e^4} x^2 dx = \frac{1}{3}[x^3 lnx]_{e}^{e^4} - \frac{1}{9}[x^3]_{e}^{e^4} = \cdots \frac{11}{9}e^{12} - \frac{2}{9}e^{3}\ \ \tau.\mu o\nu.$$