

Φ Ρ Ο Ν Τ Ι Σ Τ Η Ρ Ι Α
Ο Μ Ο Κ Ε Ν Τ Ρ Ο
Α. Φλωρόπουλου
για μαθητές με απαιτήσεις

http://www.floropoulos.gr - email: info@floropoulos.gr

• ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42
• ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 25 Νοεμβρίου 2023

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\sin x)' = \eta \mu x$.

γ) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$.

δ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ και}$$

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \ln x.$$

B1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2) .

Μονάδες 8

B3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\phi=g \circ f$.

Μονάδες 6

B4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο

$$h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Αν $\phi(x)=\ln x - \ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$, να εξετάσετε αν $\phi=h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0)=1$, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)=1+2xf(x)$, για κάθε $x \geq 0$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 8

Γ3. Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f(\beta)}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 4

Γ4. Δείξτε ότι $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

■ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 1$

■ $g(x) = x \ln x$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + 3h) - f(5)}{h} = 3f'(5)$$

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(1)=2$ και $f'(1)=1$ και να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$$

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο $x_0=1$ είναι η ευθεία $\epsilon: y=x-1$.

Μονάδες 5

Δ4. i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Μονάδες 3

ii) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{(e^x - 1)\eta\mu x}$$

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία!!!