ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 25 Νοεμβρίου 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού σελίδα 99

Α2. Θεωρία σχολικού σελίδα 162

Α3. Θεωρία σχολικού σελίδα 74

Α4. **α)** Σ

β) Λ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} +\infty, \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} -\infty$$

x=1 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ της C_f.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

y=1 ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ της C_f στο $+\infty$. Ομοίως στο $-\infty$.

Β2.

Θεωρούμε $h(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{x}{x-1} - lnx, x \in [e, e^2]$

Η h είναι συνεχής στο$[e, e^2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$h(e) = \frac{1}{e-1} > 0, h(e^2) = \frac{2-e^2}{e^2-1} < 0$

$h(e) \cdot h(e^2) < 0$

Από Θ. Bolzano η h(x)=0 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (e, e^2).

Β3.

$A_{\varphi} = A_{gof} = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\} = \{x > 1 \; και \; \frac{x}{x-1} > 0\} = (1, +\infty)$

$\varphi(x) = (gof)(x) = g\big(f(x)\big) = ln\frac{x}{x-1} = lnx - \ln(x-1)$

Β4. $A_\varphi = A_h = (1, +\infty)$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$:

$\varphi(x) = lnx - \ln(x-1) = ln\frac{x}{x-1} = h(x)$. Άρα $\varphi = h$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 1$

Θέτουμε: g(x)=f(x)-x

Τότε $g^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2+1}$ (1)

Έστω g(x)=0. Από (1) $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2= -1$ Αδύνατο.

Άρα $g(x) \neq 0$. Επίσης η g είναι συνεχής στο [1, +∞] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Τότε η g διατηρεί το πρόσημό της και επειδή g(0)=1>0 θα ισχύει g(x)>0, για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Από (1): $g(x) = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο [0, +∞) ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 > 0$

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞) και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$A_{f^{-1}} = f(A) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)] = [1, +\infty). Άρα \; h(x) \geq 1 \quad (2)$$

Γ3. Θεωρούμε: h(x)=(x-2) f(α)+(x-1)f(β).

Η h είναι συνεχής στο [1, 2] ως πολυωνυμική

h(1)= - f(α)<0 από (2)

h(2)= f(β)>0 από (2)

h(1)·h(2)<0. Από Θ. Bolzano η h(x)=0 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Γ4.

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) \cdot \sqrt{x^2+1} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right) \cdot \sqrt{x^2+1} =$$

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+1} = x+\sqrt{x^2+1} = f(x)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτουμε: $3h = u \Leftrightarrow h = \frac{u}{3}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5+3h)-f(5)}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{f(5+u)-f(u)}{\frac{u}{3}} = 3\lim_{u\to 0} \frac{f(5+u)-f(u)}{u} = 3\, f'(5)$$

Δ2.

Θεωρούμε: $g(x) = \frac{f(x)-2}{x-1}, x \neq 1,$

$\lim_{x\to 1} g(x) = 1.\ Τότε: f(x) = (x-1)g(x)+2$

Η f είναι συνεχής στο x=1 οπότε:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}[(x-1)g(x)+2] = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 1 = f'(1)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2x}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)g(x)+2-2x}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot[g(x)-2]}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-2}{x} = -1$$

Δ3. y-f(1)=f’(1)·(x-1)⇒y=x+1

Δ4.

$$\boldsymbol{i})\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\boldsymbol{ii})\ \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{(e^x-1)\cdot \eta\mu x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xlnx}{(e^x-1)\cdot \eta\mu x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{lnx}{x}}{\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(lnx \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)'}{(x)'} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Από (1):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{(e^x-1)\eta\mu x} = -\infty$$