ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 21 - 10 - 2023

Θέμα Α

Α1. α
Α2. δ
Α3. γ
Α4. α
Α5. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Α. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η σταθερά επαναφοράς D του συστήματος είναι:

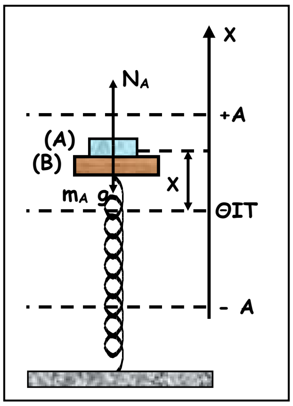
$$D = (m_A + m_B)\,\omega^2 \xrightarrow{m_B\ =\ 2\,m_A} D = 3m_A\,\omega^2$$

Η σταθερά επαναφοράς D_A του σώματος Α είναι: $D_A = m_A\,\omega^2$

Άρα ο λόγος της σταθεράς επαναφοράς του συστήματος προς τη σταθερά επαναφοράς του σώματος Α είναι:

$$\frac{D}{D_A} = \frac{3\,m_A\,\omega^2}{m_A\,\omega^2} \rightarrow \frac{D}{D_A} = 3\ .$$

Β. Σωστή απάντηση είναι το (γ).



Για τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα Α θα ισχύει:

$\Sigma F_A = -D_A x \rightarrow N_A - w_A = -m_A \omega^2 x \rightarrow$

$N_A - m_A g = -m_A \omega^2 x \rightarrow \mathbf{N_A = m_A \cdot g - m_A \omega^2 x}$ **(1)**

Όταν το σώμα Α χάνει την επαφή του με το σώμα Β, η κάθετη δύναμη N_A που δέχεται από το σώμα Β μηδενίζεται. Άρα:

(1) $\xrightarrow{N_A = 0} m_A \cdot g = m_A \omega^2 x \rightarrow \omega^2 x = g \rightarrow \mathbf{x = \frac{g}{\omega^2}}$.

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (α)

Η σταθερά επαναφοράς και η μάζα συνδέονται με τη σχέση $D = m\,\omega^2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{100\,N/m}{4\,Kg}} \rightarrow \omega = 5\ rad/s.$$

Από τη σχέση περιόδου - γωνιακής συχνότητας παίρνουμε:

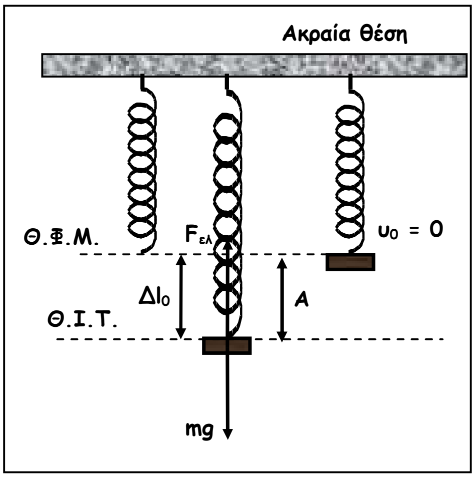
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}\ s \rightarrow T = 0{,}4\pi\ s.$$

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διαβάσεων από τη θέση ισορροπίας είναι:

$$\mathbf{\Delta t = \frac{T}{2} = 0{,}2\pi\ s.}$$

B3. *Σωστή απάντηση είναι η (β)*

Επειδή τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ αφήνονται από την ΘΦΜ για να εκτελέσουν απλή αρμονική ταλάντωση, η ΘΦΜ θα είναι ακραία θέση της ταλάντωσης τους, άρα τα πλάτη των ταλαντώσεων τους θα είναι ίσα με:



$A_1 = \Delta\ell_{0(1)}$ και $A_2 = \Delta\ell_{0(2)}$ με $\Delta\ell_{0(1)} = 2\Delta\ell_{0(2)}$ (1)

Η ενέργεια ταλάντωσης για το σώμα $Σ_1$ θα είναι:

$E_1 = \frac{1}{2}k_1 A_1^2$ και για το σώμα $Σ_2$: $E_2 = \frac{1}{2}k_2 A_2^2$.

Όμως: $E_2 = 2E_1 \rightarrow \frac{1}{2}k_2 A_2^2 = 2\frac{1}{2}k_1 A_1^2 \rightarrow$

$k_2 \Delta l_{(0)2}^2 = 2\, k_1 \Delta l_{(0)1}^2 \rightarrow$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\Delta l_{(0)2}^2}{2\Delta l_{(0)1}^2} \xrightarrow{(1)} \frac{k_1}{k_2} = \frac{\Delta l_{(0)2}^2}{2\left(2\Delta l_{(0)2}\right)^2} = \frac{\Delta l_{(0)2}^2}{2\,4\Delta l_{(0)2}^2} = \frac{1}{8} \rightarrow \mathbf{\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{8}}$$

Θέμα Γ

Γ1. Το σώμα $Σ_1$ κάνει ΑΑΤ με $D = k = M\,\omega_1^2 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 5$ rad/s, περίοδο $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{2\pi}{5}$ s και πλάτος $A_1 = d = \frac{\pi}{20}$ m οπότε για να φθάσει από την θέση που αφήνεται ελεύθερο (ακραία θέση) στη θέση ισορροπίας του θα χρειασθεί χρόνο: $t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{10}$ s.

Για να συναντηθούν τα δύο σώματα στην θέση ισορροπίας του $Σ_1$ θα πρέπει το $Σ_2$ κάνοντας ελεύθερη πτώση να διανύσει το ύψος h σε χρόνο t_1 . Άρα:

$$h = \frac{1}{2}\,g\,t_1^2 = \frac{1}{2}\,10\,\frac{\pi^2}{100} \rightarrow \mathbf{h = 0{,}5\ m.}$$

Γ2. Οι ταχύτητες των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αμέσως πριν την πλαστική κρούση στην θέση ισορροπίας του $Σ_1$ είναι ίσες με:

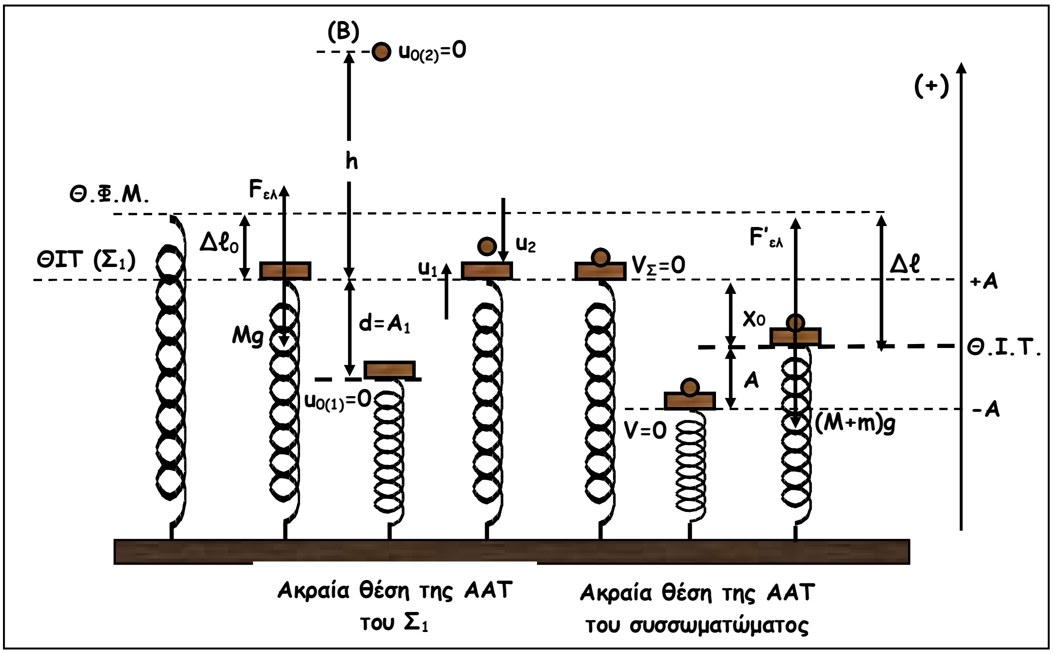
$u_1 = u_{max} = \omega_1 A_1 = 5\,\frac{\pi}{20} \rightarrow \mathbf{u_1 = \frac{\pi}{4}\ m/s}$ και

$u_2 = g\, t_1 = 10\,\frac{\pi}{10} \rightarrow \mathbf{u_2 = \pi\ m/s}$.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση

$\vec{p}^{\,συστ}_{αρχ} = \vec{p}^{\,συστ}_{τελ} \rightarrow M\,u_1 - m\,u_2 = (M + m)\,V_Σ \rightarrow 4\,\frac{\pi}{4} - \pi = 5\,V_Σ \rightarrow \mathbf{V_Σ = 0}$

άρα το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση ακινητοποιείται στιγμιαία.



Γ3. Εφαρμόζουμε συνθήκες ισορροπίας στην θέση ισορροπίας (ΘΙΤ) του $Σ_1$ και στη θέση ισορροπίας (ΘΙΤ) του συσσωματώματος για να υπολογίσουμε την απόσταση x ανάμεσα στις δύο θέσεις.

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F_{ελ} = Mg \rightarrow k\,\Delta\ell_0 = M\,g \rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{M\,g}{k} = 0{,}4\ m$$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow F'_{ελ} = (M + m)g \rightarrow k\,\Delta\ell = (M + m)\,g \rightarrow 100\Delta\ell = 50 \rightarrow \Delta\ell = 0{,}5\ m$$

$$x_0 = \Delta\ell - \Delta\ell_0 \rightarrow \mathbf{x_0 = 0{,}1\ m}.$$

Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κάνει ΑΑΤ με $D = k$ και πλάτος $\mathbf{A = x_0 = 0{,}1}$ **m γιατί η θέση κρούσης (ΘΙΤ $Σ_1$) είναι ακραία θέση της ΑΑΤ του συσσωματώματος αφού η ταχύτητα του αμέσως μετά την κρούση μηδενίζεται στιγμιαία.**

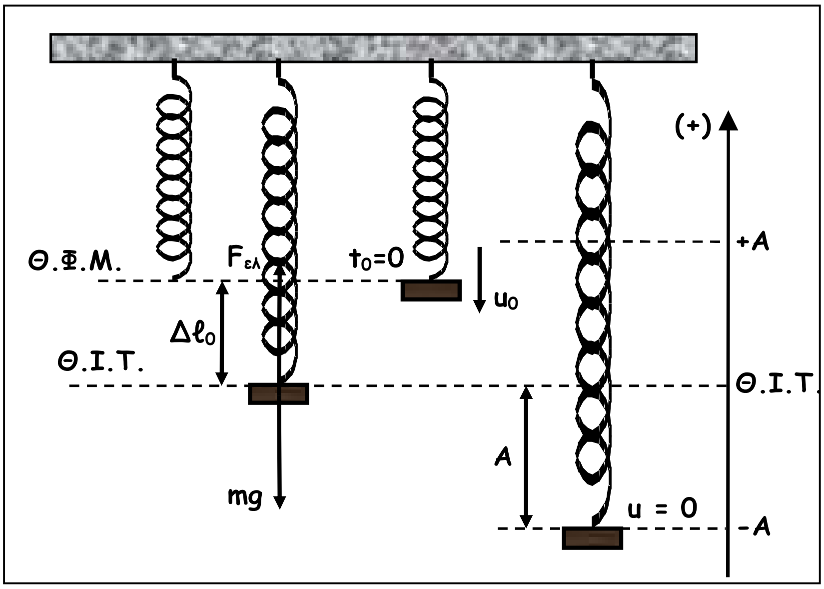
Γ4. Η μέγιστη τιμή της δύναμης του ελατηρίου που δέχεται το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του μετά την κρούση είναι:

$$F^{max}_{ελ} = k\,\Delta\ell_{max} = k\,(A + A + \Delta\ell_0) = 100\,(0{,}2 + 0{,}4) \rightarrow \mathbf{F^{max}_{ελ} = 60\ N}$$

Θέμα Δ

Δ1) Επειδή το διάστημα, που διανύει το σώμα, μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη Θ.Ι. του είναι: $s = 2A \rightarrow \mathbf{A = \frac{s}{2} = 0,2\ m}$.

Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη Θ.Ι. του σώματος είναι:
$\Delta t = \frac{T}{2} \rightarrow T = 2\ \Delta t \rightarrow T = \frac{\pi}{5}\ s$



και η γωνιακή συχνότητα ω ισούται με: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\ rad/s$.

Το σύστημα ελατηρίου – σώματος κάνει ΑΑΤ με $D = k = m\ \omega^2$

Εφαρμόζοντας συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι.Τ. έχουμε:
$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow F_{ελ} = m\ g \rightarrow m = \frac{F_{ελ}}{g} = \frac{1}{10} \rightarrow \mathbf{m = 0,1\ Kg}$.
Άρα: $D = k = m\ \omega^2 = 0,1\ \ 100 = 10\ N/m \rightarrow \mathbf{k = 10\ N/m}$.

Δ2) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $U_{ελ} = \frac{1}{2}K\ \Delta\ell^2$, όπου $\Delta\ell$ είναι η απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου.

Η θέση, που η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν, είναι η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Άρα ζητείται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη ΘΙ, που όπως φαίνεται απ' το σχήμα, απέχει $\Delta\ell_0$ από τη Θέση Φυσικού Μήκους.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Hooke στην ΘΙΤ παίρνουμε:

$F_{ελ} = k\,Δℓ_0 \rightarrow Δℓ_0 = \dfrac{F_{ελ}}{k} = 0{,}1$ m

Συνεπώς η ζητούμενη δυναμική ενέργεια ελατηρίου θα είναι:

$U_{ελ} = \dfrac{1}{2}\,k\,Δl_0^2 = \dfrac{1}{2}\,10\;0{,}01 \rightarrow \mathbf{U_{ελ} = 0{,}05\ J}$

Δ3) Για να υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα, θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ΑΑΤ του σώματος ανάμεσα στην αρχική θέση και στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης.

$K_0 + U_0 = E_{ολ} \rightarrow \dfrac{1}{2}m\,u_0^2 + \dfrac{1}{2}k\,Δl_0^2 = \dfrac{1}{2}k\,A^2 \rightarrow \dfrac{1}{10}\,u_0^2 + 10\,\dfrac{1}{100} = 10\,\dfrac{4}{100} \rightarrow$

$u_0^2 = 3 \rightarrow \mathbf{u_0 = \sqrt{3}\ m/s.}$

Δ4) Τη χρονική στιγμή t = 0, το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $χ = Δℓ_0 = 0{,}1$ m και έχει ταχύτητα μέτρου $\sqrt{3}$ m/s με φορά αρνητική, άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ΣF}}{dt} = \frac{ΣF\,dx}{dt} = ΣF\,u_0 = -\,k\,χ\,u_0 = -\,10\;\;0{,}1\,(-\sqrt{3}) \rightarrow \mathbf{\frac{dK}{dt} = \sqrt{3}\ J/s}$$