

**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ**  
**ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ**  
**Α. Φλωρόπουλου**  
 για μαθητές με απαιτήσεις

30  
 ΧΡΟΝΙΑ ΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

http://www.floropoulos.gr - email: info@floropoulos.gr

• ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42  
 • ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Σάββατο 14 Οκτωβρίου 2023

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x)=x^v$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ . Δείξτε ότι  $f'(x)=(x^v)'=v x^{v-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0 \in \Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ισχύει  $(\eta\mu x)^1 = -\sigma\upsilon\nu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**β)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$  τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $\Delta$ .

**δ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$

**ε)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = -\infty$ ,  $v$  άρτιος

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x - 2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = e^x + 1$ . Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(3, 2)$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$  και να βρείτε την  $f \circ g$ . Αν  $f \circ g = h$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Δείξτε ότι η  $h$  είναι 1-1.

**Μονάδες 6**

**B3.** Δείξτε ότι η  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $h^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τα διαστήματα του  $\mathbb{R}$  όπου η γραφική παράσταση της  $h^{-1}$  βρίσκεται πάνω από την ευθεία:  $\varepsilon: y = \ln 2$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο συναρτήσεις που είναι συνεχείς και ισχύουν  $f^2(x) = 3x^2 + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 1$  και  $xg(x) + 2 = g(x) + f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Δείξτε ότι η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Δείξτε ότι  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Δείξτε ότι  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \frac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $4g(x) = 7x$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ ax + \beta, & x > 1 \end{cases}$

**Δ1.** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Για  $\alpha = 3$  και  $\beta = -2$  να δείξτε ότι η εξίσωση  $10 f(x) = -7x + 1$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο  $[0, 1]$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{f(x) + 1}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να υπολογισθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)}$

**Μονάδες 6**

**Καλή επιτυχία!!!**