ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 14 Οκτωβρίου 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 106

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 23

Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 95

Α4. **α.** Λ, **β.** Λ, **γ.** Σ, **δ.** Σ, **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(3)=2 \Leftrightarrow \frac{3\alpha-1}{3-2}=2 \Leftrightarrow \alpha=1$$

$$A_{fog}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x\in IR/e^x+1\neq 2\}=IR^*$$

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{e^x}{e^x-1}$$

Άρα

$$h(x)=\frac{e^x}{e^x-1}, x\in IR^*$$

Β2. Για κάθε x_1, $x_2 \in A$ με

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow e^{x_1}(e^{x_2}-1)=e^{x_2}(e^{x_1}-1)\Leftrightarrow \cdots x_1=x_2$$

Β3.

$$y=\frac{e^x}{e^x-1}\Leftrightarrow y(e^x-1)=e^x\Leftrightarrow e^x(y-1)=y \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x=\frac{y}{y-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=ln\frac{y}{y-1}, y\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

Άρα

$$h^{-1}(x)=ln\frac{x}{x-1}, x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

Β4.

$$h^{-1}(x) > ln2 \Leftrightarrow ln\frac{x}{x-1} > ln2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} > 2 \Leftrightarrow (-x+2)\cdot(x-1) > 0$$

Άρα $x \in (1, 2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}\ Αδύνατο$$

Άρα $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο IR διατηρεί το πρόσημό της. Όμως $f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$, $x \in$ IR.

Γ2.

$$\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{3x^2+1} \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{3x^2+1} \overset{f(x)>0}{\Longleftrightarrow} f(x) = \sqrt{3x^2+1}$$

Γ3.

$$xg(x) - g(x) = f(x) - 2 \Leftrightarrow (x-1)g(x) = f(x) - 2 \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{f(x)-2}{x-1}$$

Η g συνεχής στο $x_0=1$ οπότε:

$$g(1) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{3x^2+1}+2\right)} = \frac{3}{2}$$

Γ4. Θεωρούμε: $h(x)=4g(x)-7x$

Η g είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$h(0)=4g(0)=4>0$

$h(1)=4g(1)-7= -1<0$

$h(0)\cdot h(1)<0$

Από Θ. Bolzano η $h(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f πρέπει να 'ναι συνεχής στο $x_0=1$ δηλαδή

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Άρα $\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=1-\alpha$ (1)

Οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, x \leq 1 \\ \alpha x + 1 - \alpha, x \geq 1 \end{cases}$$

Επίσης

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x^2+x+1)=3$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha(x-1)}{x-1}=\alpha$$

Άρα α=3 και από (1) β= -2.

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση: $\varphi(x)=10x^3+7x-1$, $x\in[0, 1]$

- Η φ είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $\varphi(0)= -1<0$

$\varphi(1)=16>0$

$\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$

Από θεώρημα Bolzano η $\varphi(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1) και επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1) θα ʻναι μοναδική.

Δ3.

$$g(x)=\sqrt{x^3+1}, x\in[0,1], g(1)=\sqrt{2}$$

$$g'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}, g'(1)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Δ4.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^3}=+\infty$$