ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4. **α)** Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της f=goh είναι

Α={x∈(0, +∞)/lnx∈R}=(0, +∞)

και ο τύπος

$$f(x) = (goh)(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{4-e^{2ln}}{e^{lnx}} = \frac{4-x^2}{x}$$

Β2. i) Η $f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, x∈(0, +∞) είναι συνεχής ως ρητή και παραγωγήσιμη με

$$f(x)' = \frac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} = \frac{-(x^2+4)}{x^2} < 0$$

για κάθε x∈(0, +∞).

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο (0, +∞).

ii) Επειδή

$$\pi > e \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\pi) < f(e) \Rightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Rightarrow e(4-\pi^2) < \pi(4-e^2) \xRightarrow{4-e^2<0}$$

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$$

Β3. Για x→+∞ είναι

■ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$

$\kappa\alpha\iota \lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right) =$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta$

Άρα y= -x είναι ασύμπτωτη της Cf στο +∞.

■ $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to0^+}\left[(4-x^2)\frac{1}{x}\right] = +\infty$

αφού $\lim_{x\to0^+}(4-x^2) = 4 > 0$ και $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$.

Άρα x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf.

Β4. Για x→+∞ έχουμε

$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}$

οπότε $\frac{-1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$

$E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

$T\acute{o}\tau\varepsilon \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{|f(x)|} = 0 \ \kappa\alpha\iota \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|} = 0$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3+\frac{9}{2}\alpha-(2+2a) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+\frac{9}{2}\alpha-2-2a = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\alpha-2\alpha = 1+2-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Γ2. i)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x-2)=-1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$ και επομένως ορίζεται εφαπτομένη της Cf στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της Cf στο $x_0=1$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+2$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x τότε

εφω $= f'(1)=-1$ και επομένως $\omega=\frac{3\pi}{4}$.

Γ3. Για $x<1$: $f'(x)=(x^2-3x+3)'=2x-3<0$

Για $x>1$: $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ είναι και συνεχής σ'αυτό και αφού

$f'(x)<0$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

Άρα η f είναι ΄΄1-1΄΄.

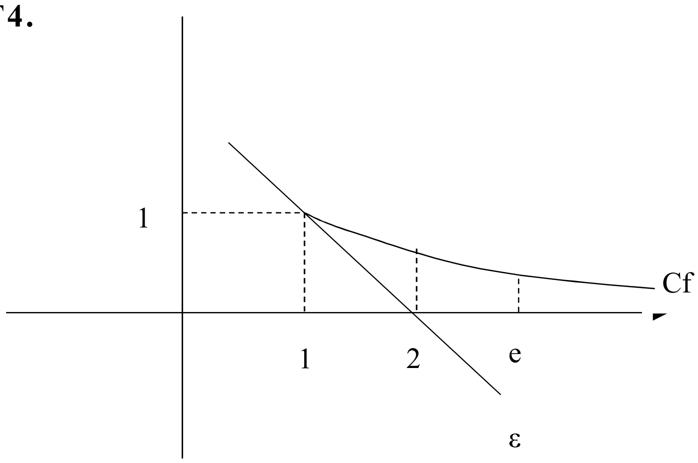
Επειδή η f είναι συνεχής στο IR (αφού είναι παραγωγίσιμη στο IR) και f είναι γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(IR)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)$$

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

Άρα $f(IR)=(0,+\infty)$.

Γ4.



Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(2, 0).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη Cf, την ευθεία ε και τον άξονα x΄x είναι:

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)$.

Όπου Ω_1 το χωρίο που περικλείεται από την Cf, την ευθεία ε και τις ευθείες x=1 και x=2 και Ω_2 το χωρίο που περικλείεται από τη Cf, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=2 και x=e.

$$\blacksquare E(\Omega_1) = \int_1^2 (f(x) - (-x+2))dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx$$

$$= \left[lnx + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = (ln2 - 2) - \left(ln1 + \frac{1}{2} - 2\right) = \left(ln2 - \frac{1}{2}\right) \tau.\mu.$$

$$\blacksquare E(\Omega_2) = \int_2^e f(x)dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = [lnx]_2^e = lne - ln2 = (1 - ln2)\ \tau.\mu.$$

$$Άρα\ E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x - 1}, x \in (0,1) \cup (1,2)$$

$$Τότε\ \lim_{x\to 1} g(x) = l \in R$$

$$και\ f(x) = (x-1)g(x) + 2x, x \in (0,1) \cup (1,2)$$

$$Επομένως\ \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}[(x-1)g(x) + 2x] = 0 \cdot l + 2 \cdot 1 = 2 \quad (1)$$

$Έχουμε\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left[ln(2-x) - \frac{1}{x} + k\right] = ln1 - 1 + k = k - 1$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει: κ-1=2⇔κ=3.

Δ2. Για κ=3 είναι:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, x \in (0,2)$$

Η f είναι συνεχής στο (0, 2) ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παρ/μη στο (0, 2) με

$$f'(x) = \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right)' = \frac{1}{2-x}\cdot(2-x)' + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} =$$

$$\frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)}$$

■ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2\ απορ.\,ή\ x = 1.$

■ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)} > 0 \overset{x^2(2-x)>0}{\underset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow}} -x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

■ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Το πρόσημο της f ΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		2
f΄(x)	‖	+	0	-	‖
f(x)	‖	↗		↘	‖

• Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] αφού η f είναι συνεχής στο (0, 1] και ισχύει f ΄(x)>0 στο (0, 1).

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1, 2) αφού η f είναι συνεχής στο [1, 2) και ισχύει f ΄(x)<0 στο (1, 2).

Θεωρούμε τα διαστήματα $Δ_1$=(0, 1] και $Δ_2$=(1, 2).

- Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $Δ_1$=(0, 1] τότε

$$f(Δ_1) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)]$$

Έχουμε:

■ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right] = -\infty$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \lim_{x\to 0^+}[ln(2-x)+3]=ln2+3\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

■ $f(1)=ln1-1+3=2$

Άρα $f(\Delta_1)=(-\infty,\ 2]$.

Επειδή $0\in f(\Delta_1)$ υπάρχει $x_1\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_1 είναι μοναδικό.

-Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(1,\ 2)$ τότε

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 2^-}f(x),\lim_{x\to 1^+}f(x)\right)$$

Έχουμε:

■ $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left[ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right]=-\infty$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \lim_{x\to 2^-}ln(2-x)\overset{2-x=u}{=}\lim_{u\to 0}lnu=-\infty$$

$$\kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x}+3\right)=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$$

■ $\lim_{x\to 1^+}f(x)\underset{\sigma\tau o\ 1}{\overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}}f(1)=2$

Άρα $f(\Delta_2)=(-\infty,\ 2)$

Επειδή $0\in f(\Delta_2)$ υπάρχει $x_2\in(1,\ 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

$$\text{Έ}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ f\left(\frac{1}{3}\right)=ln\frac{5}{3}>0\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \frac{5}{3}>1$$

$$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ 0<ln\frac{5}{3}\Leftrightarrow f(x_1)<f\left(\frac{1}{3}\right)\overset{f\uparrow(0,1]}{\Longleftrightarrow}x_1<\frac{1}{3}$$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ και παρ/μη στο $(x_1,\ \frac{1}{3})$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f΄ είναι παρ/μη στο (0, 2) με

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^3}<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,2).$$

Άρα η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 2), οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχει μοναδικό σημείο Μ(ξ, f(ξ)) με $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ στο οποίο η κλίση της Cf ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4. i) Επειδή F και G είναι αρχικές συναρτήσεις της f στο (0, 2) υπάρχει σταθερά $c \in R$ τέτοια ώστε F(x)=G(x)+C για κάθε $x \in (0, 2)$ (3).

Για $x=x_1$ από (3) προκύπτει:

$$F(x_1) = G(x_1) + C \overset{F(x_1)=0}{\Longleftrightarrow} C = -G(x_1)$$

Άρα $F(x)=G(x)-G(x_1)$ για κάθε $x \in (0, 2)$ (4)

Για $x=x_2$ από (4) προκύπτει:

$$F(x_2)=G(x_2)-G(x_1) \overset{G(x_2)=0}{\Longleftrightarrow} F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση

$g(x)=x_1\, F(x)+x_2\, G(x)+2\, x-x_1-x_2,\ x \in [x_1,\ x_2]$.

• Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (οι F, G είναι συνεχείς στο (0, 2) αφού F, G είναι παρ/μες στο (0, 2)).

• $g(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)+2x_1-x_1-x_2$

$$\overset{F(x_1)=0}{=} x_2\, G(x_1)+x_1-x_2$$

$$= -x_2\, F(x_2)+x_1-x_2$$

$g(x_2)= x_1\, F(x_2)+x_2\, G(x_2)+2x_2-x_1-x_2$

$$\overset{G(x_2)=0}{=} x_1\, F(x_2)+x_2-x_1$$

Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2). Αφού f(1)=2>0 τότε f(x)>0 για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Επειδή $F'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ τότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$.

Είναι $x_2>x_1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x_2)>F(x_1) \Leftrightarrow F(x_2)>0$.

Άρα $g(x_1)<0$ (αφού $-x_2F(x_2)<0$ και $x_1-x_2<0$) και $g(x_2)>0$ (αφού $x_1F(x_2)>0$ και $x_2-x_1>0$).

Οπότε $g(x_1)\, g(x_2)<0$.

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow$

$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

Η g είναι παρ/μη στο (x_1, x_2) με $g'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2$

$$= x_1f(x)+x_2f(x)+2$$

$$= (x_1+x_2)f(x)+2>0$$

για κάθε $x\in(x_1, x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2) και επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (x_1, x_2).

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. –ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4. **α)** Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της f=goh είναι

A={x∈(0, +∞)/lnx∈R}=(0, +∞)

και ο τύπος

$$f(x)=(goh)(x)=g\big(h(x)\big)=\frac{4-e^{2lnx}}{e^{lnx}}=\frac{4-x^2}{x}$$

Β2. i) Η $f(x)=\frac{4-x^2}{x}$, x∈(0, +∞) είναι συνεχής ως ρητή και παραγωγήσιμη με

$$f(x)'=\frac{-2x\cdot x-(4-x^2)}{x^2}=\frac{-2x^2-4+x^2}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}=\frac{-(x^2+4)}{x^2}<0$$

για κάθε x∈(0, +∞).

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο (0, +∞).

ii) Επειδή

$$\pi>e\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(\pi)<f(e)\Rightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Rightarrow e(4-\pi^2)<\pi(4-e^2)\xRightarrow{4-e^2<0}$$

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$$

Β3. Για x→+∞ είναι

■ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1=\lambda$

$$\kappa\alpha\iota \lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Άρα y= -x είναι ασύμπτωτη της Cf στο +∞.

■ $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to0^+}\left[(4-x^2)\frac{1}{x}\right] = +\infty$

αφού $\lim_{x\to0^+}(4-x^2) = 4 > 0$ και $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$.

Άρα x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf.

Β4. Για x→+∞ έχουμε

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

οπότε $\frac{-1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

Τότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{|f(x)|} = 0$ *και* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|} = 0$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3+\frac{9}{2}\alpha-(2+2a) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{9}{2}\alpha-2-2a = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\alpha-2\alpha = 1+2-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Γ2. i)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x-2)=-1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με f΄(1)= -1 και επομένως ορίζεται εφαπτομένη της Cf στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της Cf στο $x_0=1$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+2$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x τότε

εφω = $f'(1)=-1$ και επομένως ω=$\frac{3\pi}{4}$.

Γ3. Για x<1: f΄(x)=$(x^2-3x+3)'$=2x-3<0

Για x>1: f΄(x)=$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ είναι και συνεχής σ'αυτό και αφού

f΄(x)<0, x∈(-∞, 1)∪(1, +∞) τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

Άρα η f είναι ΄΄1-1΄΄.

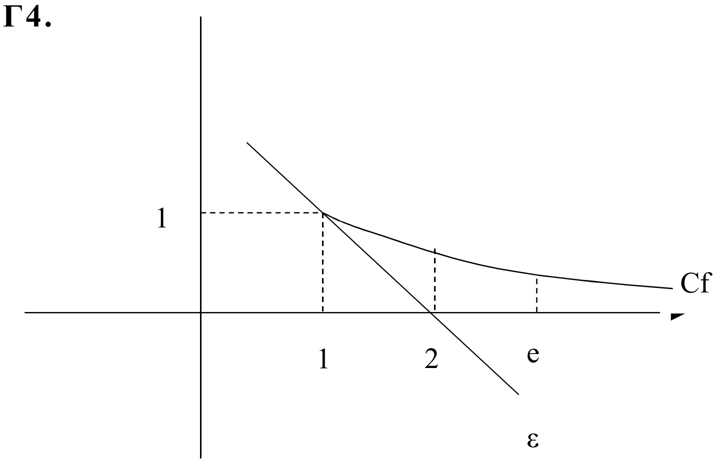
Επειδή η f είναι συνεχής στο IR (αφού είναι παραγωγίσιμη στο IR) και f είναι γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(IR)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)$$

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

Άρα f(IR)=(0, +∞).

Γ4.



Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(2, 0).

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη Cf, την ευθεία ε και τον άξονα x΄x είναι:

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)$.

Όπου Ω_1 το χωρίο που περικλείεται από την Cf, την ευθεία ε και τις ευθείες x=1 και x=2 και Ω_2 το χωρίο που περικλείεται από τη Cf, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=2 και x=e.

$$\blacksquare E(\Omega_1)=\int_1^2 (f(x)-(-x+2))dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx$$

$$=\left[lnx+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=(ln2-2)-\left(ln1+\frac{1}{2}-2\right)=\left(ln2-\frac{1}{2}\right)\tau.\mu.$$

$$\blacksquare E(\Omega_2)=\int_2^e f(x)dx=\int_2^e\frac{1}{x}dx=[lnx]_2^e=lne-ln2=(1-ln2)\ \tau.\mu.$$

$$Άρα\ E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}, x\in(0,1)\cup(1,2)$$

$$Τότε\ \lim_{x\to 1} g(x)=l\in R$$

$$και\ f(x)=(x-1)g(x)+2x, x\in(0,1)\cup(1,2)$$

$$Επομένως\ \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}[(x-1)g(x)+2x]=0\cdot l+2\cdot 1=2\quad(1)$$

$Έχουμε \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[ln(2-x) - \frac{1}{x} + k\right] = ln1 - 1 + k = k - 1$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει: κ-1=2⇔κ=3.

Δ2. Για κ=3 είναι:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, x \in (0,2)$$

Η f είναι συνεχής στο (0, 2) ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παρ/μη στο (0, 2) με

$$f'(x) = \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right)' = \frac{1}{2-x}\cdot(2-x)' + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} =$$

$$\frac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)}$$

■ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2\ απορ.\ ή\ x = 1.$

■ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)} > 0 \underset{x\in(0,2)}{\overset{x^2(2-x)>0}{\Leftrightarrow}} -x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

■ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Το πρόσημο της f ΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		2
f΄(x)	‖	+	0	-	‖
f(x)	‖	↗		↘	‖

• Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] αφού η f είναι συνεχής στο (0, 1] και ισχύει f ΄(x)>0 στο (0, 1).

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1, 2) αφού η f είναι συνεχής στο [1, 2) και ισχύει f ΄(x)<0 στο (1, 2).

Θεωρούμε τα διαστήματα $Δ_1$=(0, 1] και $Δ_2$=(1, 2).

- Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $Δ_1$=(0, 1] τότε

$$f(\Delta_1) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)]$$

Έχουμε:

■ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right] = -\infty$

$αφού \lim_{x\to 0^+}[ln(2-x)+3] = ln2+3 \; και \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$

■ $f(1) = ln1 - 1 + 3 = 2$

Άρα $f(\Delta_1)=(-\infty, 2]$.

Επειδή $0\in f(\Delta_1)$ υπάρχει $x_1\in(0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_1 είναι μοναδικό.

-Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(1, 2)$ τότε

$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right)$

Έχουμε:

■ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left[ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right] = -\infty$

$αφού \lim_{x\to 2^-} ln(2-x) \overset{2-x=u}{=} \lim_{u\to 0} lnu = -\infty$

$και \lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x}+3\right) = -\frac{1}{2}+3 = \frac{5}{2}$

■ $\lim_{x\to 1^+} f(x) \underset{στο\ 1}{\overset{f\ συνεχής}{=}} f(1) = 2$

Άρα $f(\Delta_2)=(-\infty, 2)$

Επειδή $0\in f(\Delta_2)$ υπάρχει $x_2\in(1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

$Έχουμε\ f\left(\frac{1}{3}\right) = ln\frac{5}{3} > 0 \; αφού \; \frac{5}{3} > 1$

$οπότε\ 0 < ln\frac{5}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \overset{f\uparrow(0,1]}{\Longleftrightarrow} x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ και παρ/μη στο $(x_1, \frac{1}{3})$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f΄ είναι παρ/μη στο (0, 2) με

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \; για\ κάθε\ x \in (0,2).$$

Άρα η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 2), οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχει μοναδικό σημείο Μ(ξ, f(ξ)) με $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ στο οποίο η κλίση της Cf ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4. i) Επειδή F και G είναι αρχικές συναρτήσεις της f στο (0, 2) υπάρχει σταθερά $c \in R$ τέτοια ώστε $F(x)=G(x)+C$ για κάθε $x \in (0, 2)$ (3).

Για $x=x_1$ από (3) προκύπτει:

$$F(x_1) = G(x_1) + C \overset{F(x_1)=0}{\Longleftrightarrow} C = -G(x_1)$$

Άρα $F(x)=G(x)-G(x_1)$ για κάθε $x \in (0, 2)$ (4)

Για $x=x_2$ από (4) προκύπτει:

$$F(x_2)=G(x_2)-G(x_1) \overset{G(x_2)=0}{\Longleftrightarrow} F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση

$g(x)=x_1 F(x)+x_2 G(x)+2x-x_1-x_2$, $x \in [x_1, x_2]$.

• Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (οι F, G είναι συνεχείς στο (0, 2) αφού F, G είναι παρ/μες στο (0, 2)).

• $g(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)+2x_1-x_1-x_2$

$$\overset{F(x_1)=0}{=} x_2 G(x_1)+x_1-x_2$$

$$= -x_2 F(x_2)+x_1-x_2$$

$g(x_2)= x_1 F(x_2)+x_2 G(x_2)+2x_2-x_1-x_2$

$$\overset{G(x_2)=0}{=} x_1 F(x_2)+x_2-x_1$$

Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2). Αφού $f(1)=2>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Επειδή $F'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ τότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$.

Είναι $x_2>x_1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x_2)>F(x_1) \Leftrightarrow F(x_2)>0$.

Άρα $g(x_1)<0$ (αφού $-x_2F(x_2)<0$ και $x_1-x_2<0$) και $g(x_2)>0$ (αφού $x_1F(x_2)>0$ και $x_2-x_1>0$).

Οπότε $g(x_1)\, g(x_2)<0$.

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow$

$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

Η g είναι παρ/μη στο (x_1, x_2) με $g'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2$

$$= x_1f(x)+x_2f(x)+2$$

$$= (x_1+x_2)f(x)+2>0$$

για κάθε $x\in(x_1, x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2) και επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (x_1, x_2).

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΟΥΣΗΣ Π. –ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr