

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

## ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μ. ΤΕΤΑΡΤΗ 27 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

### ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0)=0$ .

**Μονάδες 8**

**A2. i)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 4**

**ii)** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$ ;

**Μονάδες 3**

**A3.** Να χαρακτηρήσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

**β.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x=x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

**γ.** Αν  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x=x_0$  τότε κατ' ανάγκη ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ .

**δ.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι "1-1" τότε ισχύει:  $f(f^{-1}(x))=x$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

**ε.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x=x_0$  τότε και η συνάρτηση  $f(g(x))$  είναι συνεχής στο  $x=x_0$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \alpha x + 2}{x-1}$ ,  $x > 1$ .

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και να είναι πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 5**

Αν  $\alpha = 0$

**B2.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή για κάθε  $x > 1$ .

**Μονάδες 4**

**B3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της  $C_f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$ .

**Μονάδες 4**

**B4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της  $C_f$  της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) και την  $x=3$ .

**Μονάδες 7**

**B5.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(e) = 1$  που ικανοποιεί τις σχέσεις

•  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$

•  $f'(x) + \frac{f^2(x)}{x} = 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Δείξτε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ . Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^{2016} = e$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Ένα υλικό σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$ ,  $\alpha > 1$  κινείται στην γραφική παράσταση της  $f$  και η τετμημένη να αυξάνεται, καθώς απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ρυθμό  $4\alpha$  cm/sec.

Αν η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M$  τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο  $A$ , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του  $A$  την χρονική στιγμή όπου  $\alpha(t_0) = e$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Θεωρούμε  $h(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 1$ .

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $h$  του άξονα  $x'x$  και της ευθείες  $x=2, x=e$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και έστω  $F(x)$  μια παράγουσα της  $f$  στο  $\mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 2xf(x)$
- $F(x) - x \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $F(0) = 0$

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(0) = 1$  και  $f(x) = e^{x^2}$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να δείξετε ότι  $e^{x^2} \geq x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 4**

**Δ3. α)** Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις  $g, h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  $g(x) \geq h(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , επίσης υπάρχει 1 τουλάχιστον  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ :

$g(x_0) \neq h(x_0)$ , να δείξετε ότι:  $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx$ .

**Μονάδες 4**

**β)** Να δείξετε ότι η εξίσωση:  $\frac{4 - 3 \int_0^1 f(x) dx}{x - 2} - \frac{f(x)}{x - 1} = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 2)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Αν  $G(x)$  είναι μια παράγουσα της  $f(x)$  στο  $\mathbb{R}$  και  $G(1) = 0$  να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:  $\int_0^1 G(x) dx$ .

**Μονάδες 5**

### Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΙΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ