ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(α, x_0) \cup (x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, όταν $x \to +\infty$.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho (gof), τότε ορίζεται και η (hog) of και ισχύει ho(gof)=(hog)of.

β) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε ισχύει πάντα $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [α, β]$ τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx \le \int_\beta^\alpha g(x)dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f: $R \to R$ με $f(x)=x-e^x$ και $g:(0, +\infty) \to R$ με $g(x)=\ln x$.

Β1. Να βρείτε την συνάρτηση fog.

Μονάδες 5

Β2. Αν $\varphi(x)=(f o g)(x)=\ln x-x$, $x>0$.

Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β3. Να δείξετε ότι η φ είναι κοίλη, να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf και να την σχεδιάσετε.

Μονάδες 7

Β4. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\ln x}{x}=\frac{2023}{x}+1$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\lambda x$, $x \in R$, $\lambda>0$.

Γ1. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $f(\ln\lambda)=\lambda(1-\ln\lambda)$, $\lambda>0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της όταν $\lambda=1$.

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του λ ($\lambda>0$) για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ για κάθε $x \in R$ είναι η $\lambda=e$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda=e$

i) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=e^x$, $x \in R$.

Μονάδες 3

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf την εφαπτομένη της Cg του ερωτήματος (i) και την ευθεία $x=0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), & x>0 \\ a, & x=0, a \in R \end{cases}$$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του α αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Μονάδες 4

Για $\alpha=0$

Δ2. i) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii) Δείξτε ότι $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

Μονάδες 3x3=9

Δ3. Θεωρούμε την εξίσωση $f(2+\eta\mu x) = f\left(2+\frac{x-1}{x+1}\right), x \in (1,+\infty)$.

i) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (1, \pi)$ και μια τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{2}{(x_0+1)^2} = 0$

Μονάδες 2x4=8

Δ4. Δείξτε ότι

$$\int_1^3 f(x)dx > 2 - ln2$$

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ