ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 4 Μαρτίου 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελίδα 142

Α2. Θεωρία σχολικό σελίδα 162

Α3.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε x∈R:

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ΄(x)	-		+
f (x)	↘	ΕΛΑΧ.	↗

Η f είναι γν. φθίνουσα στο (-∞, 0], γν. αύξουσα στο [0, +∞) και παρουσιάζει για x=0 ελάχιστο με τιμή f(0)=0.

Β2.

$$f''(x) = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$	$-\infty$
f΄΄(x)	-		+		-
f (x)		Σ.Κ		Σ.Κ	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$, κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κοίλη στο $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

$$Σ.Κ. \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

Β3.

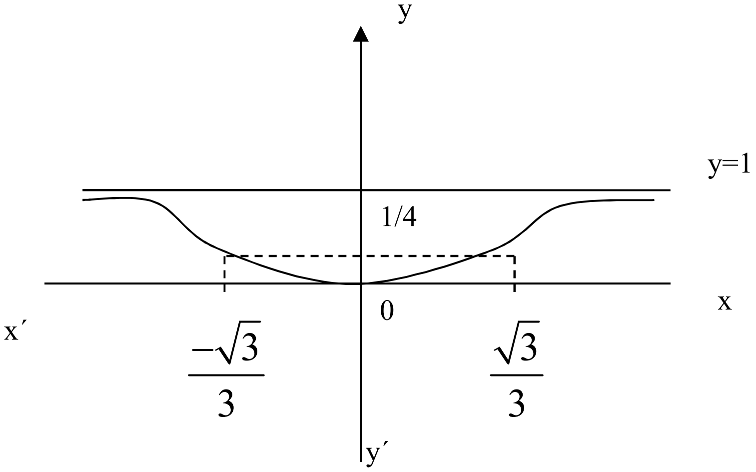
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = 0 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 = \beta$$

Άρα y=1 οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο +∞.

Ομοίως στο -∞.

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$[(x^2+9)\cdot f(x)]' = (x)'άρα\ (x^2+9)\cdot f(x) = x + c, c \in IR$

Για x=0: c=0.

Άρα $(x^2+9)\cdot f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$

Γ2.

$$f'(x)=\frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$

x	-∝	3	3	+∝
f ΄(x)	-	+	-	
f (x)	↘	↗	↘	
		T.E.	T.M.	

Η f είναι γν. φθίνουσα στο (-∞, -3], γν. αύξουσα στο [-3, 3] ↘ στο [3, +∞) και παρουσιάζει για x= -3 T.E. με τιμή f(-3)= -$\frac{1}{6}$ και για x=3 T.M. με τιμή $f(3)=\frac{1}{6}$.

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)\cdot lnx]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot lnx}{x^2+9}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x\cdot lnx)'}{(x^2+9)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx+1}{2x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx+1)'}{(2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

Γ4.

Έστω f(x)≥0⇔x≥0

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+9)'}{x^2+9}dx$$

$$=\frac{1}{2}[ln(x^2+9)]_0^1=\frac{1}{2}(lm10-ln9)\ \tau.\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$.

Θέτουμε g(x)=$\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ για x κοντά στο 0,

οπότε $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$ και f(x)= $g(x)\cdot\eta\mu x$ για x κοντά στο 0.

Άρα f(0) $=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right)=1\cdot0=0$ αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R.

Έχουμε $\int_0^{\pi} f(x)+f''(x)\eta\mu x\,dx=\pi \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$ οπότε $f(\pi)=\pi$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x}{x}=1$$

Δ2. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R έχουμε $\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f\left(f(x)\right)+e^{x}\right)' \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^{x}$, $x\in R$ (1)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=x_0$. Από θ. Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$. Οπότε η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται $e^{x_0}=1 \Leftrightarrow x_0=0$ δηλαδή $f'(0)=0$ ΑΤΟΠΟ αφού $f'(0)=1$. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R.

β) Αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και η f' είναι συνεχής στο R τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Επειδή $f'(0)=1>0$ τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ αφού f(R)=R και η f είναι γν. αύξουσα στο R.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x)>f(0)=0$ και

$$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\frac{\left|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right|}{\left|f(x)\right|}\le\frac{\left|\eta\mu x\right|+\left|\sigma\upsilon\nu x\right|}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}$$

Άρα $-\dfrac{2}{f(x)}\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\dfrac{2}{f(x)}$ και αφού

$\lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{f(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{f(x)}=0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4. Θέτουμε $u=\ln x$

$$du=\frac{1}{x}dx$$

Για $x=1$: $u=\ln 1=0$

Για $x=e^{\pi}$: $u=\ln e^{\pi}=\pi$

Άρα $\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi}f(u)du$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0, π] οπότε για κάθε u∈[0, π] ισχύει ότι $f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(u)\le \pi \Leftrightarrow f(u)\ge 0$ και $\pi - f(u)\ge 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0.

Άρα $\int_0^{\pi} f(u)du>0$ και $\int_0^{\pi}(\pi-f(u))du>0\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(u)du>0$ και

$[\pi x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(u)du>0\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(u)du>0$ και

$\int_0^{\pi} f(u)du<\pi^2 \Leftrightarrow 0<\int_0^{\pi} f(u)du<\pi^2$

Επομένως $0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$