ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 14 Ιανουαρίου 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν

• Η f είναι συνεχής στο Δ και

• f΄(x)=0 για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και f΄(x)≠0, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε f(0)≠f(1).

γ) Η συνάρτηση f(x)=σφx είναι παραγωίγισμη στο R_2=R-{x|ημx=0} και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f: R→R, με $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι f(x)>0, για κάθε $x \in R$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f: $(-\infty,1]\to R$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση g: $[0,+\infty)\to R$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h=fog.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι ''1-1'' (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \ x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2} & , \ x=1\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,1].

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=$ημα, όπου $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x\ln x & , \ x>0 \\ 0 & , \ x=0\end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 7

Γ2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο των τιμών της.

Μονάδες 9

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{1}{x}}$, $\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{\ln x}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση f(f(x))=e.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) e^{-f(x)} \eta\mu f(x) \right]$$

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=e και $x=e^4$.

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία!!!