ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 14 Ιανουαρίου 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 133

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 73

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 128

Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$A_h = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 \; και \; \sqrt{x} \leq 1\} = [0,1]$

$h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = (x-1)^2$

Β2. Η h είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με h′(x)=2(x-1)<0. Άρα η h είναι $\searrow$ στο [0, 1] και ′′1-1′′.

Θέτουμε:

$y = h(x) \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y} \xRightarrow{x\in[0,1]} x = 1 - \sqrt{y} \Rightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$

Άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, A_h = h(A) = [h(1), h(0)] = [0,1]$

Β3. i) Η φ είναι συνεχής στο [0, 1) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x\to1} \varphi(x) = \lim_{x\to1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1} \frac{1}{(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Οπότε η φ είναι συνεχής και στο x_0=1.

φ(0)≠φ(1). Οπότε για κάθε αριθμό n που βρίσκεται μεταξύ των φ(0), φ(1) υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $\varphi(x_0)$=n.

ii)

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$$

Οπότε υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$: $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(0)$$

Γ2. Η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x)=lnx+1$

$$f'(x) \geqq 0 \Leftrightarrow lnx \geqq -1 \Leftrightarrow x \geqq \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		+∞
f'(x)		-	0	+	
f (x)		$\searrow$	ΕΛΑΧ.	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right]$.

$A_1 = \left[0,\frac{1}{e}\right]$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $f(A_1) = \left[-\frac{1}{e},0\right]$

$A_2 = \left[\frac{1}{e},+\infty\right]$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $f(A_2) = \left[-\frac{1}{e},+\infty\right]$

Άρα $f(A) = \left[-\frac{1}{e},+\infty\right]$

Γ3.

$$x = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow lnx = lne^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow lnx = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xlnx = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1, x \in (0,+\infty)$$

- $1 \notin f(A_1)$ οπότε η εξίσωση f(x)=1 δεν έχει ρίζες στο A_1.

- $1 \in f(A_2)$ οπότε η f(x)=1 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή η f είναι $\nearrow$ στο A_2 θα 'ναι μοναδική.

Γ4. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$ υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ ώστε $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$.

Όμως $\xi<x+1 \Leftrightarrow f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο [1, +∞) ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (1, +∞) με

$$f'(x) = \sqrt{lnx} + \frac{1}{2\sqrt{lnx}} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1, +∞) και ''1-1''.

Δ2. f(f(x))=e⇔f(f(x))=f(e)⇔f(x)=e⇔f(x)=f(e)⇔x=e

Δ3. Θέτουμε f(x)=u

Οπότε

$$\lim_{u\to+\infty}(u\, e^{-u} \cdot \eta\mu u) = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{e^u} \cdot \eta\mu u\right)$$

Όμως

$$-1 \leq \eta\mu u \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{u}{e} \leq \frac{u}{e^u}\ \eta\mu u \leq \frac{u}{e^u}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{u}{e^u}\right) = \lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u} = 0$$

Από Κ.Π.:

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{e^u} \cdot \eta\mu u\right) = 0$$

Δ4.

$$E = \int_e^{e^4} \frac{1}{f(x)}dx = \int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx = \left[2\sqrt{lnx}\right]_e^{e^4} = 2\sqrt{lne^4} - 2\sqrt{lne} = 4 - 2 = 2\ \tau.\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma.$$