



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 26 Νοεμβρίου 2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Μονάδες 7

A2. i) Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Μονάδες 2

iι) Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 2

A3. i) Να απαντήσετε με (Σ) αν είναι σωστός και (Λ) αν είναι λανθασμένος ο ισχυρισμός:

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδα 1

ii) Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

A4. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή παρακάτω πρόταση.

i) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f : $[\alpha, \beta]$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε:

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο διάστημα (α, β)

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (α, β)

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις στο διάστημα (α, β)

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α, β) .

Μονάδες 5

ii) Για μια συνεχή και γν. φθίνουσα συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της είναι

α. $(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(\alpha)]$

$$\beta. \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$$

$$\gamma. \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

δ. $[f(\beta), f(\alpha)]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση fog .

Μονάδες 7

B2. Αν $h(x) = (fog)(x) = -\ln(x-1)$, $x > 1$ δείξτε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 7

B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = 1 + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε να μελετήσετε την μονοτονία της φ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 10)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = x_0 - 3$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$, για κάθε $x \geq 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in [0, +\infty)$$

Μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 7

Γ3. Για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha - 1} + \frac{f(\beta)}{\beta - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον ένα λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 5

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 - x^2 - (\lambda - 1)x$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια λύση στο $(0, 1)$.

ii. Η εξίσωση $3\lambda x - 2 = \frac{\lambda-1}{x}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

iii. Για $\lambda=2$ να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}
- $g(x) = x \ln x$ και $\Phi(x) = e^x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+3h) - f(5)}{h} = 3f'(5)$$

Μονάδες 4

Δ2. Αν $f(1)=2$ και $f'(1)=1$ να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$$

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ στο $x_0=1$ είναι η ευθεία $y=x-1$.

Μονάδες 3

Δ4. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y=x-1$ (του παραπάνω ερωτήματος) να εφαπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\Phi(x)$

Μονάδες 5

Δ5. Για $\lambda = -1$ να υπολογίσετε το

$$\int_0^1 \Phi(x) dx$$

Μονάδες 3

Δ6. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{(e^x - 1)\eta x}$$

Μονάδες 4

Καλή επιτυχία!!!