ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ. 99

Α2. Θεωρία σχολικό σελ. 162

Α3. Θεωρία σχολικό σελ. 128

Α4. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} \overset{\left(\frac{\alpha}{0}\right)}{=} +\infty$$

Άρα x=1

ΚΑΤ. ΑΣ της Cf.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1$$

Άρα y=1 ΟΡ. ΑΣ της Cf στο +∞.

Β2. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x-1} - lnx\ \sigma\tau o\ [e, e^2]$$

• Η h είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

■ $h(e) = \frac{1}{e-1} > 0, h(e^2) = \frac{2-e^2}{e^2-1} < 0, h(e)\cdot h(e^2) < 0$

Από θ.Β. η h(x)=0 ή f(x)=y(x) έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (e, e^2) .

Β3.

$$A_\varphi = A_{gof} = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\} = \left\{x > 1\ \kappa\alpha\iota\ \frac{x}{x-1} > 0\right\} = (1, +\infty)$$

$$\varphi(x) = (gof)(x) = g(f(x)) = ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Β4. $A_\varphi=(1, +\infty)$

$A_h=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$

$A_\varphi \neq A_h$ άρα $\varphi \neq h$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Θεωρούμε

$$g(x)=\frac{f(x)-\eta\mu x}{x}, x\neq 0$$

Τότε $f(x)=x\,g(x)+\eta\mu x$, $x\neq 0$

Η f είναι παραγ. στο IR άρα και συνεχής οπότε

■ $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\,g(x)+\eta\mu x)=0$

■ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,g(x)+\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)+\frac{\eta\mu x}{x}\right]=1=f'(0)$

ii. $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

Γ2. $f'(x)\cdot f''(x)=x\Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f''(x)=2x\Leftrightarrow([f'(x)^2])'=(x^2)'$. Τότε υπάρχει $c\in IR$ ώστε $[f'(x)]^2=x^2+c$. Για $x=0$: $[f'(0)]^2=c\Leftrightarrow 1=c$.

Άρα $[f'(x)]^2=x^2+1$ (1)

$\sqrt{[f'(x)]^2}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow |f'(x)|=\sqrt{x^2+1}$ (2)

Έστω $f'(x)=0$. Από (1): $x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$.

Αδύνατο. Άρα $f'(x)\neq 0$

Επίσης f′ είναι συνεχής στο IR οπότε η f′ διατηρεί το πρόσημό της και επειδή $f'(0)=1>0$ θα ισχύει $f'(x)>0$.

Από (2): $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$

Γ3.

Για κάθε $x\in IR$: $f''(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Αν $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Αν $f''(x)>0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)		ΣΚ.	

Η f στο $(-\infty, 0]$, στο $[0, +\infty)$, ΣΚ. (0, 0).

Γ4. Η $y=x$ εφάπτεται της C_f στο (0, 0) οπότε:

- Η f στο (-∞, 0] άρα

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq x, x < 0 \ , \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Η f στο [0, +∞) άρα

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq x, x > 0 \ , \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0, x \in IR$

Άρα η f είναι $\nearrow$ στο IR οπότε ‘’1-1’’ και αντιστρέφεται.

$$A_{f^{-1}} = f(A) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = IR$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ e^{xlnx}, & 0 < x \leq \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

■ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^3 + 3x + 1) = 1$

■ $\lim\limits_{x \to 0^+} (xlnx) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{lnx}{\dfrac{1}{x}} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(lnx)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$

Οπότε

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{xlnx} = e^0 = 1$

■ $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο x=0.

■ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2 + 3) = 3$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{xlnx}-1}{x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{xlnx}-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}[e^{xlnx}(lnx+1)]=-\infty$$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=0.

Δ2. i.

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2+3, & -1<x<0\\ e^{xlnx}(lnx+1), & 0<x<\dfrac{2}{e}\end{cases}$$

- Ένα κρίσιμο σημείο της f είναι το x=0 όπου η f δεν παραγωγίζεται.
- Αν $x\in(-1,\ 0)$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ Αδύνατη
- Αν $x\in\left(0,\frac{2}{e}\right): f'(x)=0\Leftrightarrow e^{xlnx}(lnx+1)=0\Leftrightarrow lnx=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

Συνολικά τα σημεία x=0, $x=\frac{1}{e}$ είναι κρίσιμα της f.

ii. Πίνακας μεταβολών της f.

x	-1		0		1/e		2/e
f′(x)		+	‖	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

$A_1=[-1,\ 0]$, $f(A_1)=[f(-1),\ f(0)]=[-1,\ 1]$

$$A_2=\left[0,\frac{1}{e}\right], f(A_2)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right]=\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},1\right]$$

$$A_3=\left[\frac{1}{e},\frac{2}{e}\right], f(A_3)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(\frac{2}{e}\right)\right]=\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},\left(\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right)\right]$$

Άρα f(A)=[-1, 1].

Δ3. Για κάθε

$$\alpha,\beta\in\left[-1,\frac{2}{e}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}-1\le f(\alpha)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2f(\alpha)<2\\ -1\le f(\beta)\le 1\Leftrightarrow -3\le 3\ f(\beta)\le 3\end{array}\right\}\quad -5\le 2f(\alpha)+3f(\beta)\le 5$$

$\Leftrightarrow -1 \le \frac{2f(\alpha)+3(\beta)}{5} \le 1$ οπότε ο αριθμός $n = \frac{2f(\alpha)+3(\beta)}{5}$ ανήκει στο f(A) και επειδή η f είναι συνεχής από Θ.Ε.Τ. υπάρχει 1 τουλάχιστον

$$\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right] : f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$$

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση: $g(x)=xf(x)-f'(x)=xe^{x\ln x}-e^{x\ln x}(\ln x+1)= e^{x\ln x}(x-\ln x-1)$, $x>0$

Γνωρίζουμε ότι: $\ln x \le x-1 \Leftrightarrow x-\ln x-1 \ge 0$

Άρα $g(x)\ge 0$ και επειδή η g δεν είναι παντού ίση με 0 στο $\left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} g(x) > 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} (xf(x) - f'(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx > \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} f'(x)dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx > [f(x)]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr