ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

Α4. **α)** Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η fog πρέπει ($x\in[0, +\infty)$ και $\sqrt{x}\in(-\infty, 1]$)$\Leftrightarrow$ ($x\in[0, +\infty)$ και $\sqrt{x}\leq 1$)$\Leftrightarrow$($x\in[0, +\infty)$ και $x\leq 1$)$\Leftrightarrow x\in[0, 1]$. Οπότε $h(x)=(fog)(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, $x\in[0, 1]$.

Β2. Για κάθε $x_1, x_2\in[0, 1]$ έχουμε $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow(x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Rightarrow|x_1-1|=|x_2-1|\Rightarrow -x_1+1= -x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$. Οπότε η h είναι ''1-1'' και αντιστρέφεται.

Λύνουμε την εξίσωση $y=h(x)\Leftrightarrow y=(x-1)^2 \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{y}\Leftrightarrow|x-1|=\sqrt{y} \overset{x\leq 1}{\Leftrightarrow} -(x-1)= \sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$.

Επειδή $x\in[0, 1]$ τότε $1-\sqrt{y}\geq 0\Leftrightarrow y\leq 1$. Άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0, 1]$.

Β3. i) Θεωρούμε

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, x=1\end{cases}$$

Η φ είναι συνεχής στο [0, 1) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Οπότε η φ είναι συνεχής στο [0, 1].

Επίσης $\varphi(0)=1$ και $\varphi(1)=\frac{1}{2}$, δηλαδή $\varphi(0)\neq\varphi(1)$. Άρα ισχύει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών στο [0, 1].

ii) Επειδή $0<\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ έχουμε $ημ\frac{\pi}{6}<ημα<ημ\frac{\pi}{2}$ δηλαδή $\frac{1}{2}<ημα<1$. Η φ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $\varphi(1)=\frac{1}{2}$ και $\varphi(0)=1$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=ημα$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x<-1$ έχουμε

$f'(x)= -2 \Leftrightarrow f'(x)=(-2x)'$

Άρα υπάρχει σταθερά $c_1 \in IR$ τέτοια ώστε $f(x)=-2x+c_1$.

Για κάθε $x>-1$ έχουμε $f'(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow f'(x)=(x^3-x)'$

Άρα υπάρχει σταθερά $c_2 \in IR$ τέτοια ώστε $f(x)=x^3-x+c_2$ και επειδή $f(0)=0$, τότε $c_2=0$.

Επομένως $f(x)=x^3-x$, $x>-1$.

Αφού η f είναι συνεχής στο -1 ισχύει

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2, x \le -1 \\ x^3 - x, x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Η εφαπτομένη ε της Cf στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0>-1$ έχει εξίσωση

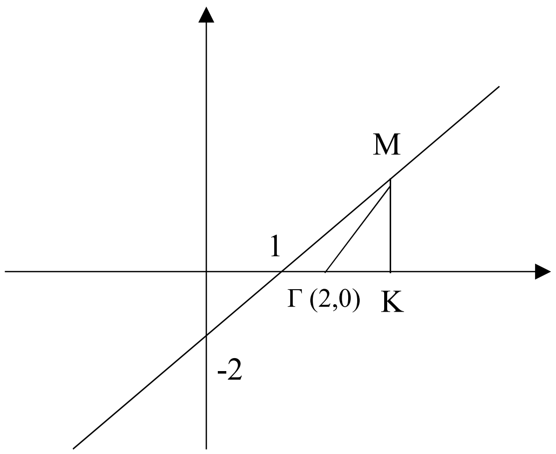
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(x-x_0)$

Η ε διέρχεται από το σημείο M(0, -2) αν και μόνο αν

$-2- x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(0-x_0) \Leftrightarrow - x_0^3+x_0-2=-3x_0^3+x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3=2 \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1$

Άρα A(1, 0) και η εφ. έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-0=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2$.

Γ3.



Έστω $x=x(t)$ και $y=y(t)$ οι συντεταγμένες του M κάθε χρονική στιγμή t, με $t\geq 0$ και $x(t)>2$. Έχουμε $x(t_0)=3$, $y(t_0)=4$ και $x'(t_0)=2$ μον/s

Το τρίγωνο ΜΚΓ έχει εμβαδόν:

$$E(t) = \frac{1}{2}(K\Gamma)\cdot(MK) = \frac{1}{2}(x(t)-2)\cdot y(t)$$

$$=\frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2)$$

$$=(x(t)-2)(x(t)-1)$$

$$=x^2(t)-3x(t)+2$$

Έχουμε:

$E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$

$=x'(t)(2x(t)-3)$

Άρα $E'(t_0)=x'(t_0)(2x(t_0)-3)=2\cdot(2\cdot 3-3)=6$ τ.μ/s.

Γ4.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$$

Θέτουμε f(x)=u, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$$

Αφού για $u\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|=\frac{|\eta\mu u|}{|u|}\leq\frac{1}{u}$$

Άρα $-\frac{1}{u}\leq\frac{\eta\mu u}{u}\leq\frac{1}{u}$ και επειδή

$$\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0$$

Από το κριτήριο παραβολής προκύπτει

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$$

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\overset{-x=y}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{1-(-y)^3}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3-y}{y^3+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3}{y^3}=1$$

Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η f είναι συνεχής στο (0, +∞) ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$$f'(x) = (x - \ln(3x))' = 1 - \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 0 < x < 1$$

Η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1	
f΄(x)		-	0	+
f(x)		↘		↗

f(1)=1-ln3<0 (αφού e<3 τότε 1<ln3)

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x - \ln(3x)) = +\infty$$

Αφού

$$\lim_{x\to 0} \ln(3x) \overset{3x=u}{=} \lim_{u\to 0} lnu = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x - \ln(3x)) =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right)\right] = +\infty$$

Αφού

$$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{(ln3x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right) = 1$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0, 1]$, οπότε $f(A_1)=[f(1), \lim_{x\to 0} f(x)) = [1-ln3, +\infty)$ και αφού $0\in f(A_1)$ η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο (0, 1) δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[1, +\infty)$, οπότε $f(A_2)=[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [1-ln3, +\infty)$ και αφού $0\in f(A_2)$, η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.

Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

ii) Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x)=(1-\frac{1}{x})'=\frac{1}{x^2}$.

Αφού $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$ η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 στο $(0, +\infty)$ με $x_1<1<x_2$

Η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) και αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(x_1, x_2)$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2).

Επειδή $x_1<1<x_2$ και f(1)=1=1-ln3<0 τότε f(x)<0 για κάθε $x\in(x_1, x_2)$.

Είναι $f(x_1)=0\Leftrightarrow\ln(3x_1)=x_1$ και $f(x_2)=0\Leftrightarrow\ln(3x_2)=x_2$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[x_1, x_2]$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x είναι:

$$E(\Omega) = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -\int_{x_1}^{x_2}(x-\ln(3x))dx = -\int_{x_1}^{x_2} x\,dx + \int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)\,dx$$

$$-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln(3x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2) + [x\ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x\cdot(ln3x)'dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2) + x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2) + x_2\cdot x_2 - x_1\cdot x_1 - (x_2-x_1) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2) + x_2^2 - x_1^2 - (x_2-x_1) =$$

$$=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-(x_2-x_1)=\frac{(x_2^2-x_1^2)-2(x_2-x_1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$$

Δ3. Έχουμε $x_1<1\Leftrightarrow -x_1>-1\Leftrightarrow 2-x_1>1$ (1)

$$E>0\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0 \xLeftrightarrow{x_2-x_1>0} x_1+x_2-2>0\Leftrightarrow x_2>2-x_1 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει:

$1<2-x_1<x_2$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, τότε ισχύει:

$f(2-x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f(2-x_1)<0$.

Δ4. Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση

$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=f'(x_2)(x-x_2)$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ ισχύει: $f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$.

Για x=1 η f παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1 με $x\in(0, +\infty)$ έχουμε:

$2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow 2f(x)=1-\ln 3+f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow$

$2f(x)=f(1)+f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2)-f(x)$

Η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$ αφού $f(x)-f(1)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για

$x=1$ και $f'(x_2)(x-x_2)-f(x)\leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$ και είναι $x_2>1$.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. –ΜΠΑΚΑΣ Ν. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.

www.floropoulos.gr