ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού σελίδα 216.

Α2. Θεωρία σχολικού σελίδα 128.

Α3. Θεωρία σχολικού σελίδα 104.

Α4. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$A_{fog} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in (0, +\infty) \ / \ lnx \in IR\} = (0, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(lnx) = lnx - e^{lnx} = lnx - x$$

Β2. Για κάθε x>0:

$$\varphi'(x) = (lnx - x)' = \frac{1 - x}{x}$$

Έστω φ΄(x)≥0⇔1-x≥0⇔x≤1.

x	0		1		+∞
φ΄(x)		+	0	-	
φ (x)		↗	-1	↘	
			ΜΕΓ.		

Η φ είναι γν. αύξουσα στο (0, 1], γν. φθίνουσα στο [1, +∞) και παρουσιάζει για x=1 μέγιστο με τιμή φ(1)= -1.

Β3. Για κάθε x>0:

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

άρα η φ στο (0, +∞).

■ $\lim_{x\to 0^+}(lnx) = -\infty$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \lim_{x\to 0^+}(lnx - x) = -\infty$$

■ $\lim_{x\to +\infty}\frac{lnx}{x} \underset{DLH}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to +\infty}\frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$

Οπότε

$$\lim_{x\to +\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to +\infty}(lnx - x) = \lim_{x\to +\infty}\left[x\left(\frac{lnx}{x} - 1\right)\right] = -\infty$$

Β4. A_1=(0, 1] οπότε $\varphi(A_1)$=(-∞, -1]

A_2= (1, +∞) οπότε $\varphi(A_2)$=(-∞, -1)

Άρα φ(Α)=(-∞, -1]

Έχουμε:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{2002}{x} + 1 \Leftrightarrow lnx = 2022 + x \Leftrightarrow lnx - x = 2022 \Leftrightarrow g(x) = 2022$$

Επειδή 2022∉φ(Α) η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε x∈IR: $f\,'(x)=e^x-\lambda$.

Έστω $f\,'(x)\geqq 0 \Leftrightarrow e^x-\lambda\geqq 0 \Leftrightarrow e^x\geqq\lambda \Leftrightarrow x\geqq \ln\lambda$.

x	-∞	lnλ	+∞
f΄(x)	-	0	+
f (x)	↘	ΕΛΑΧ.	↗

Η f είναι γν. φθίνουσα στο (-∞, 0], γν. αύξουσα στο [0, +∞) και παρουσιάζει για x=lnλ ελάχιστο με τιμή f(lnλ)=λ·(1-lnλ)

Γ2. Θεωρούμε g(λ)=λ(1-lnλ), λ>0.

Για λ>0: g΄(λ)= -lnλ.

Έστω g΄(λ) ≧0⇔lnλ≦0⇔λ≦1

λ	0		1		+∞
g΄(λ)		+	0	-	
g (λ)		↗	ΜΕΓ.	↘	

Η g παρουσιάζει μέγιστο για λ=1 με τιμή g(1)=1

Γ3. $e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Αφού f(x)≥0 θα ισχύει: $\lambda(1-\ln\lambda) \geq 0 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow} 1 - ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq e$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ θα είναι η λ=e.

Γ4. Η ευθεία y=e·x για να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της Cg αρκεί να υπάρχει $x_0 \in$ IR ώστε

$$\begin{cases} g(x_0) = e \cdot x_0 \\ g'(x_0) = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_0} = e \cdot x_0 \\ e^{x_0} = e \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} \underset{DLH}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{u\to+\infty} \frac{[\ln(1+u)]'}{(u)'} =$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{1+u} = 0 = a$$

Δ2. i)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty$$

οπότε δεν ορίζεται f ΄(0).

ii) Θεωρούμε: g(t)=lnt, t∈[x, x+1]

Η g συνεχής στο [x, x+1] ως λογαριθμική και παραγωγίσιμη στο (x, x+1) με g΄(t)=$\frac{1}{t}$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει

$$\xi\in(x,x+1): g'(f)=\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow g'(\xi)=g(x+1)-g(x)$$

$$g''(t)=-\frac{1}{t^2}<0$$

Άρα η g΄ $\searrow$ στο (0, +∞)

Επειδή ξ<x+1 $\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} g'(\xi)>g'(x+1)\Leftrightarrow g(x+1)-g(x)>\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow \ln(x+1)-lnx>\frac{1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{x+1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$$

iii) Για κάθε x>0:

$$f'(x)=ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)=\cdots ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

Άρα η f $\nearrow$ στο [0,+∞), οπότε η f είναι ‘’1-1’’ και αντιστρέφεται.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{u=\frac{1}{x}}{=}$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln(1+u)}{u}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{[ln(1+u)]'}{(u)'}=\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{1+u}=1$$

$A_{f^{-1}}=f(A)=(0,1).$

Δ3. i)

$$f(2+\eta\mu x)=f\left(2+\frac{x-1}{x+1}\right)\overset{f:''1-1''}{\Longleftrightarrow}2+\eta\mu x=2+\frac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x-\frac{x-1}{x+1}=0$$

Θεωρούμε

$$h(x)=\eta\mu x-\frac{x-1}{x+1}, x\in[1,+\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} h(1)=\eta\mu 1>0 \\ h(\pi)=-\frac{\pi-1}{\pi+1}<0 \end{array}\right\} \quad h(1)\cdot h(\pi)<0$$

Από θ. Β η h(x)=0 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα $x_1\in(1,\pi)$

$$h\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{5\pi}{2}-\frac{\frac{5\pi}{2}-1}{\frac{5\pi}{2}+2}=\frac{2}{\frac{5\pi}{2}+1}>0$$

$$h(\pi)\cdot h\left(\frac{5\pi}{2}\right)<0$$

Από θ. Β η h(x)=0 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα $x_2\in\left(\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$.

ii)

$$\text{Για } x>1: h'(x)=\cdots \sigma\upsilon\nu x-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$h'(x_1)=h'(x_2)=0. \text{Από θ.} Rolle \text{ υπάρχει } x_0\in(x_1,x_2): h'(x_0)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0-\frac{2}{(x_0+1)^2}=0$$

Δ4. Για x>0:

$$ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow x\cdot f\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow f(x)>\frac{x+1-1}{x+1}\Leftrightarrow f(x)>1-\frac{1}{x+1}$$

Τότε:

$$\int_1^3 f(x)dx>\int_1^3\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\Rightarrow\int_1^3 f(x)dx>[x-ln|x+1|]_1^3\Rightarrow\int_1^3 f(x)dx>2-ln2$$