α) Είναι:

$$|1 - 3α| < 2 \Leftrightarrow -2 < 1 - 3α < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 - 1 < -1 + 1 - 3α < -1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < -3α < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{-3} > \frac{-3α}{-3} > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < α < 1 \quad (1)$$

β) Επειδή η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1, ισχύει ότι:

$$d(2, β) < 1 \Leftrightarrow |β - 2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < β - 2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + 2 < β - 2 + 2 < 1 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < β < 3 \ (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (1) με -3 και βρίσκουμε:

$$-\frac{1}{3} < α < 1 \Leftrightarrow 1 > -3α > -3 \Leftrightarrow -3 < -3α < 1 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (2) και (3) και βρίσκουμε:

$$1 - 3 < β - 3α < 3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < β - 3α < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 - 1 < β - 3α - 1 < 4 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < β - 3α - 1 < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |β - 3α - 1| < 3$$

γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R αν και μόνο αν ισχύει:

$$4x^2 - 4(β - 2)x + β^2 \geq 0, \ (4) \ \text{για κάθε } x \in R$$

Το τριώνυμο $4x^2 - 4(β - 2)x + β^2$ έχει συντελεστή του x^2 τον αριθμό $4 > 0$ και διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 - 4αγ = [-4(β - 2)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot β^2 =$$

$$= 16(β^2 - 4β + 4) - 16β^2 =$$

$$= 16β^2 - 64β + 64 - 16β^2 =$$

$$= 64 - 64β$$

Η ανίσωση (4) ισχύει για κάθε $x \in R$ αν και μόνο αν:

$$Δ < 0 \Leftrightarrow 64 - 64β < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -64β < -64 \Leftrightarrow β > 1,$$

το οποίο ισχύει λόγω της ανίσωσης (2).