α) Πρέπει:

$$|2 - x| \neq 0 \Leftrightarrow 2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{2\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο έχει α = 1, β = – 5, γ = 6 και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Είναι:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{|2-x|}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Για x > 2 είναι: $|2 - x| = -(2 - x) = x - 2$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$$

2η περίπτωση

Για x < 2 είναι: $|2 - x| = 2 - x = -(x - 2)$, οπότε η f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = -(x - 3) = -x + 3$$

Τελικά έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$$

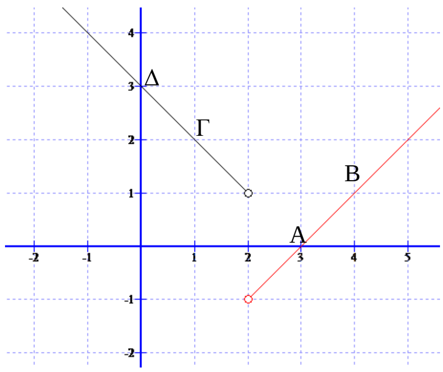
γ) Για x = 3 είναι f(3) = 0 και για x = 4 είναι f(4) = 1.

Επομένως η ευθεία $y = x - 3$ διέρχεται από τα ασημεία Α(3, 0) και Β(4, 1).

Για x = 1 είναι f(1) = 2 και για x = 0 είναι f(0) = 3.

Επομένως η ευθεία $y = 3 - x$ διέρχεται από τα ασημεία Γ(1, 2) και Δ(0, 3).

Η γραφική παράσταση της f είναι:



Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{|2-x|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 3) \overset{x\neq 2}{\Longleftrightarrow} x = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(3, 0).

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \frac{0^2-5\cdot 0+6}{|2-0|} = \frac{6}{2} = 3$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, 3).

δ) Αναζητούμε τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα x΄x καθώς και τα σημεία τομής της f με τον άξονα x΄x. Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$x \in (2, 3]$$

Σχόλιο

Προφανώς, τα σημεία τομής με τους άξονες θα μπορούσαμε να τα συμπεράνουμε από τη γραφική παράσταση της f χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις.