

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

β) Επειδή είναι $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$ οι $\alpha^2 - 3\alpha + 2$, $\beta^2 - 3\beta + 2$ είναι ετερόσημοι.

Από την απάντηση του ερωτήματος (α), διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 < 0 \text{ και } \alpha < \beta) \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha < 1 \text{ ή } \alpha > 2 \text{ και } 1 < \beta < 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 < 0 \text{ και } \beta - 2 < 0)$$

Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\alpha > 2$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \beta < 2$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

2^η περίπτωση

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2 < 0 \text{ και } \beta^2 - 3\beta + 2 > 0 \text{ και } \alpha < \beta) \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (1 < \alpha < 2 \text{ και } \beta < 1 \text{ ή } \beta > 2 \text{ και } \alpha < \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1 > 0 \text{ και } \beta - 2 > 0)$$

Τότε $(\alpha - 1)(\beta - 2) > 0$. Άρα

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$

Την περίπτωση $\beta < 1$ την απορρίπτουμε διότι σε συνδυασμό με την ανίσωση $1 < \alpha < 2$ καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, που είναι άτοπο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει ότι:

$$|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$$