

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |x - 4| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \Leftrightarrow -2 + 4 < x - 4 + 4 < 2 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (2, 6) \end{aligned}$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d(x, 4) < 2 &\Leftrightarrow |x - 4| < 2 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 - 4 < 3x - 4 < 18 - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14 \end{aligned}$$

Άρα  $3x - 4 > 0$  (1).

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2 < d(3x, 4) < 14 &\Leftrightarrow 2 < |3x - 4| < 14 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 14 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{6}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{18}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από σκέλος (α).

ii) Θέλουμε να βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση:

$$d(3x, 19) = |3x - 19|$$

Από το σκέλος (α) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} 2 < x < 6 &\Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 - 19 < 3x - 19 < 18 - 19 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -13 < 3x - 19 < -1 \quad (2) \end{aligned}$$

Άρα  $3x - 19 < 0$ . Τότε:

$$d(3x, 19) = |3x - 19| = -(3x - 19) = -3x + 19$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (2) με  $-1$  και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} -13 < 3x - 19 < -1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -13 \cdot (-1) > (3x - 19) \cdot (-1) > -1 \cdot (-1) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 13 > -3x + 19 > 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < -3x + 19 < 13 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < d(3x, 19) < 13 \end{aligned}$$