

α) Το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$x^2 + x - 6$	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{1}{2} \right| > 1 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} < -1 \text{ ή } x - \frac{1}{2} > 1 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x < -1 + \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1 + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ή } x > \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) \end{aligned}$$

γ) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha, \alpha > 0$$

Τότε:

$$E < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 < 0 \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} -3 < \alpha < 2$$

Επειδή όμως είναι $\alpha > 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$0 < \alpha < 2 \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| > 1 \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} \left(\alpha < -\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha > \frac{3}{2} \right) \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha > \frac{3}{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) καταλήγουμε ότι:

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2\alpha + 2(\alpha + 1) = 2\alpha + 2\alpha + 2 = 4\alpha + 2$$

Τότε από το σκέλος (γi) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} < \alpha < 2 &\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} < 4 \cdot \alpha < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 < 4\alpha < 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 + 2 < 4\alpha + 2 < 8 + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8 < \Pi < 10 \end{aligned}$$