

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος  $(\alpha_n)$  με λόγο  $\lambda$  για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο  $\alpha_1$  και το λόγο  $\lambda$  της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(\beta_n)$ , με  $(\beta_n) = \frac{1}{\alpha_n}$  αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της  $(\alpha_n)$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν  $S_{10}$  και  $S'_{10}$  είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων  $(\alpha_n)$  και  $(\beta_n)$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10} \quad (\text{Μονάδες } 8)$$