

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |\alpha - 2| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 + 2 < \alpha - 2 + 2 < 1 + 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3 &\Leftrightarrow \alpha \in (1, 3) \end{aligned}$$

β) i) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \alpha^2 - 4\alpha + 4 - 1 = \alpha^2 - 4\alpha + 3$$

Το τριώνυμο $\alpha^2 - 4\alpha + 3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$\alpha^2 - 4\alpha + 3$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0, \text{ για κάθε } \alpha \in (1, 3)$$

ii) Αφού το τριώνυμο $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$ έχει $\Delta < 0$ θα έχει πρόσημο το ίδιο με το πρόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του $1 > 0$. Άρα:

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο

Το σκέλος (βi) μπορεί να λυθεί και ως εξής:

Επειδή $\Delta = [-(\alpha - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = (\alpha - 2)^2 - 1$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} 0 < |\alpha - 2| < 1 &\Leftrightarrow 0 < |\alpha - 2|^2 < 1^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < (\alpha - 2)^2 - 1 < 1 - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < \Delta < 0 &\Leftrightarrow \Delta < 0 \end{aligned}$$