α) Η ανίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 \geq 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x \geq 2\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$$

β) i) Επειδή είναι $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$ οι $\kappa - 1$, $\lambda - 1$ είναι ετερόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$(\lambda - 1 > 0 \text{ και } \kappa - 1 < 0) \Leftrightarrow (\lambda > 1 \text{ και } \kappa < 1) \Leftrightarrow \kappa < 1 < \lambda$$

2η περίπτωση

$$(\lambda - 1 < 0 \text{ και } \kappa - 1 > 0) \Leftrightarrow (\lambda < 1 \text{ και } \kappa > 1) \Leftrightarrow \lambda < 1 < \kappa$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ, λ.

ii) Αφού οι κ, λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ισχύει ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ, τότε θα είναι:

$$\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \geq 2 \quad \text{ή} \quad \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$$\left(\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } \lambda \geq 2\right) \Leftrightarrow \left(\kappa \leq \frac{1}{2} \text{ και } -\lambda \leq -2\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \leq \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \leq -\frac{3}{2}$$

2η περίπτωση

$$\left(\lambda \leq \frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2\right) \Leftrightarrow \left(-\lambda \geq -\frac{1}{2} \text{ και } \kappa \geq 2\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ανισώσεις και βρίσκουμε:

$$\kappa - \lambda \geq -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow \kappa - \lambda \geq \frac{3}{2}$$

Τελικά, και από τις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε:

$$\left(\kappa-\lambda\leq-\frac{3}{2}\ \text{ ή }\ \kappa-\lambda\geq\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$$