

α) Επειδή $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, θα ισχύει:

$$(\alpha - 1 > 0 \text{ και } 1 - \beta > 0) \text{ ή } (\alpha - 1 < 0 \text{ και } 1 - \beta < 0)$$

1^η περίπτωση

$$\alpha - 1 > 0 \text{ και } 1 - \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ και } 1 > \beta \Leftrightarrow \beta < 1 < \alpha$$

2^η περίπτωση

$$\alpha - 1 < 0 \text{ και } 1 - \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \text{ και } 1 < \beta \Leftrightarrow \alpha < 1 < \beta$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β .

β) Αλγεβρικά

• Αν $\beta < 1 < \alpha$, τότε:

$$\begin{cases} \beta < 1 \\ 1 < \alpha \\ \beta < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1 - \beta \\ 0 < \alpha - 1, \\ \beta - \alpha < 0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} |\alpha - 1| &= \alpha - 1, \quad |1 - \beta| = 1 - \beta \text{ και} \\ |\beta - \alpha| &= 4 \Leftrightarrow -(\beta - \alpha) = 4 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 4 \quad (1) \end{aligned}$$

Η παράσταση K γράφεται:

$$\begin{aligned} K &= |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \\ &= \alpha - 1 + 1 - \beta = \alpha - \beta \stackrel{(1)}{=} 4 \end{aligned}$$

• Αν $\alpha < 1 < \beta$, τότε:

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ 1 < \beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 < 0 \\ 1 - \beta < 0, \\ 0 < \beta - \alpha \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} |\alpha - 1| &= -(\alpha - 1) = 1 - \alpha, \\ |1 - \beta| &= -(1 - \beta) = \beta - 1 \text{ και} \\ |\beta - \alpha| &= 4 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Η παράσταση K γράφεται:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta| = 1 - \alpha + \beta - 1 = \beta - \alpha \stackrel{(2)}{=} 4$$

Γεωμετρικά

Έστω $A(\alpha)$, $B(\beta)$ και $\Gamma(1)$ όπου το Γ βρίσκεται μεταξύ των A και B . Τότε:

$$\begin{aligned} K &= |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \\ &= d(\alpha, 1) + d(1, \beta) = \\ &= A\Gamma + \Gamma B = \\ &= AB = d(\alpha, \beta) = \\ &= |\beta - \alpha| = 4 \end{aligned}$$