α) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{-2} = -1 \\ \dfrac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2 + 2x + 8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$-x^2 + 2x + 8 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

$$-x^2 + 2x + 8 < 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

β) Ο αριθμός 2,999 ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου το τριώνυμο είναι θετικό. Άρα:

$$f(2{,}999) > 0$$

Ο αριθμός $-1{,}002$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$ όπου το τριώνυμο είναι αρνητικό. Άρα:

$$f(-1{,}002) < 0$$

Επομένως είναι:

$$f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002) < 0$$

γ) Ο αριθμός $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3$ προκύπτει αν στον τύπο της f θέσουμε $x = |\alpha|$.

Είναι δηλαδή:

$$f(|\alpha|) = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 = -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$

Επειδή είναι:

$$-3 < \alpha < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < 3 \Leftrightarrow 0 \leq |\alpha| < 3$$

ο αριθμός $|\alpha|$ ανήκει στο διάστημα $(-1, 3)$ όπου η f είναι θετική. Άρα:

$$f(|\alpha|) > 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$$