

α) Έστω ότι το πλάτος του παραλληλογράμμου είναι y cm. Τότε η περιμέτρος του είναι:

$$\Pi = 2x + 2y$$

Είναι:

$$\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 20 - x \quad (1)$$

Επειδή τα x, y είναι διαστάσεις πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 20 - x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x > -20 \Leftrightarrow x < 20$$

Τελικά:

$$0 < x < 20$$

β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι:

$$E = x \cdot y \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = x(20 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2, \quad x \in (0, 20)$$

γ) Είναι:

$$E(x) \leq 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \leq 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 10x + 10^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από το ερώτημα (γ) η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι 100 cm^2 . Άρα:

$$E(x) = 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

και $y = 20 - 10 = 10$. Άρα από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 40 cm το τετράγωνο με πλευρά 10 cm έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.