

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:

$$E_1 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ m}^2$$

Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15 + 2x$, $25 + 2x$ και εμβαδόν:

$$\begin{aligned} E_2 &= (15 + 2x)(25 + 2x) = \\ &= 375 + 30x + 50x + 4x^2 = \\ &= 4x^2 + 80x + 375 \end{aligned}$$

Το εμβαδόν της ζώνης είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_2 - E_1 = \\ &= 4x^2 + 80x + 375 - 375 = \\ &= 4x^2 + 80x, x > 0 \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E &= 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5 \text{ m}$.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E(x) &< 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0 \end{aligned}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$x^2 + 20x - 125$				

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} x^2 + 20x - 125 &< 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (0, 5) \end{aligned}$$