α) Οι αριθμοί $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 + x = \frac{x^2+5+2x+4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + x) = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = 3)$$

β) Για $x = 3$ είναι:

$$\alpha_4 = 3^2 + 5 = 14 \text{ και}$$

$$\alpha_5 = 3^2 + 3 = 12 .$$

i) Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12 - 14 = -2$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3(-2) = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + ... + \alpha_{24} =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{14} + \alpha_{15} + ... + \alpha_{24} - (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{14}) =$$

$$= S_{24} - S_{14} =$$

$$= \frac{24}{2}[2 \cdot 20 + (24-1) \cdot (-2)] - \frac{14}{2}[2 \cdot 20 + (14-1) \cdot (-2)] =$$

$$= 12(40 - 46) - 7(40 - 26) = -72 - 98 = -170$$